

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון מבחן מתכונת 1 – קיץ תשפ"ד

הוראות

- א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.
- ב. מבנה הבחינה ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
- פרק ראשון - אלגברה והסתברות
 - פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור
 - פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות.
- יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $100 = 20 \times 5$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
 - שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד, יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.
- השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

יש לענות על ארבע מן השאלות 1 – 8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 25 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. רכבת יוצאת מחיפה לבאר שבע בשעה 9:00 בבוקר.

כעבור זמן מה יוצאת רכבת מבאר שבע לחיפה במהירות הגבוהה ב-25% ממהירות הרכבת הקודמת.

הרכבות חולפות זו על פני זו בשעה 10:30 במרחק 75 ק"מ מבאר שבע.

כעבור חצי שעה מפגישתן, היה המרחק ביניהן 90 ק"מ.

א. חשבו באיזו שעה יצאה הרכבת מבאר שבע.

ב. חצי שעה לאחר שנפגשו, הפחיתה הרכבת שיצאה מחיפה את מהירותה,

כך ששתי הרכבות הגיעו ליעדן בו זמנית.

חשבו בכמה קמ"ש הפחיתה הרכבת שיצאה מחיפה את מהירותה.

2. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה q .

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים שווה

ל- $a_1 \cdot 12,288$. נתון: $a_{2k-2} = 3,072$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 6$.

ג. (1) קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את

תשובתכם.

(2) מצאו את k .

מן הסדרה A בונים את הסדרה האינ-סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי-זוגיים,

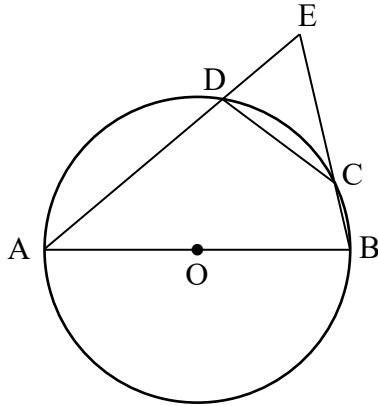
כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C .

3. במבחני הכניסה לקורס חובשים, 20% מהמשתתפים הגיעו מגדוד השריון. יתר המשתתפים, בחלוקה שווה, הגיעו מגדוד התותחנים ומגדוד הרגלים. רק 70% מאלו הניגשים למבחן הכניסה עוברים אותו בהצלחה. שמינית ממועמדי גדוד הרגלים נכשלו במבחן. ההסתברות לבחור מכלל המועמדים חייל מגדוד התותחנים שעבר את המבחן בהצלחה קטנה פי שניים מההסתברות לבחור מבין חיילי השריון, משתתף שעבר בהצלחה. א. מבין החיילים שנכשלו במבחן, חשבו את ההסתברות לבחור חייל שאינו שייך לגדוד התותחנים. ב. הראל עבר את המבחן בהצלחה. חשבו את ההסתברות שהוא הגיע מגדוד הרגלים. ג. קבעו האם המאורעות: "להיות חייל שריון" ו- "להיכשל במבחן" הם תלויים או בלתי תלויים. נמקו. ד. חמישה חיילים עברו את המבחן בהצלחה. חשבו את ההסתברות שלפחות אחד מהם הגיע מגדוד הרגלים.

פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל שמרכזו O. המשכי המיתרים AD ו-BC נחתכים בנקודה E כמתואר בשרטוט.



א. הוכיחו: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

נתון: $CD = R$.

ב. (1) הוכיחו: $\widehat{DC} = 60^\circ$.

(2) חשבו את הזווית $\angle AEB$.

(3) חשבו את יחס הדמיון בין המשולשים ABE ו-CDE.

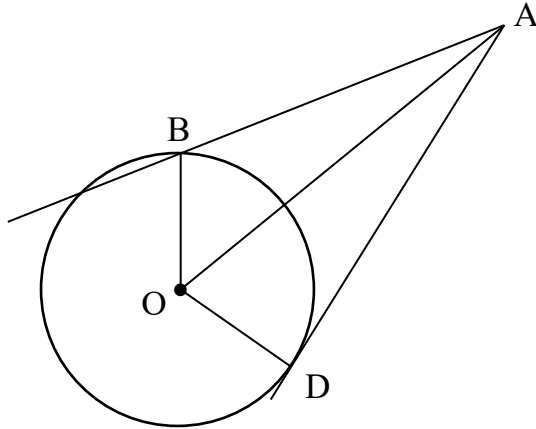
נסמן: $BC = b$, $DE = a$. נתון: $AD = 4 \cdot BC$.

ג. (1) הביעו באמצעות a ו-b את אורך EC.

(2) הוכיחו: $a = 2b$.

(2) חשבו את היחס: $\frac{AE}{BE}$.

5. נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R. מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה B וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט. נסמן: $\angle AOB = \beta$, $\angle AOD = \alpha$.



א. הביעו באמצעות α , β ו-R, אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO.

(2) אורך הקטע AB.

נתון: $AB = \sqrt{2} \cdot R$.

ב. הוכיחו כי $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r.

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו- β .

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,
של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. א. נתונה הפונקציה $f(x)$ ו- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) בטאו את $g'(x)$ באמצעות $f'(x)$.

(2) האם קיים, בתחום בו $f(x)$ וגם $g(x)$ גזרות, ערך של x עבורו $\frac{f'(x)}{g'(x)} > 0$? נמקו.

(3) האם ייתכן שהגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה- x ? נמקו.

(4) אם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים, מה ניתן לומר על

נקודת החיתוך?

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

עבור כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, מצאו אסימפטוטות

המאונכות לציר ה- x ונקודות חיתוך עם הצירים.

ג. לפונקציה $f(x)$ יש רק נקודת קיצון אחת בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

(1) מצאו תחומי העלייה והירידה וקבעו את סוג הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו תחומי עלייה וירידה ונקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו את הגרפים של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

ד. בכמה נקודות נחתכים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$? נמקו.

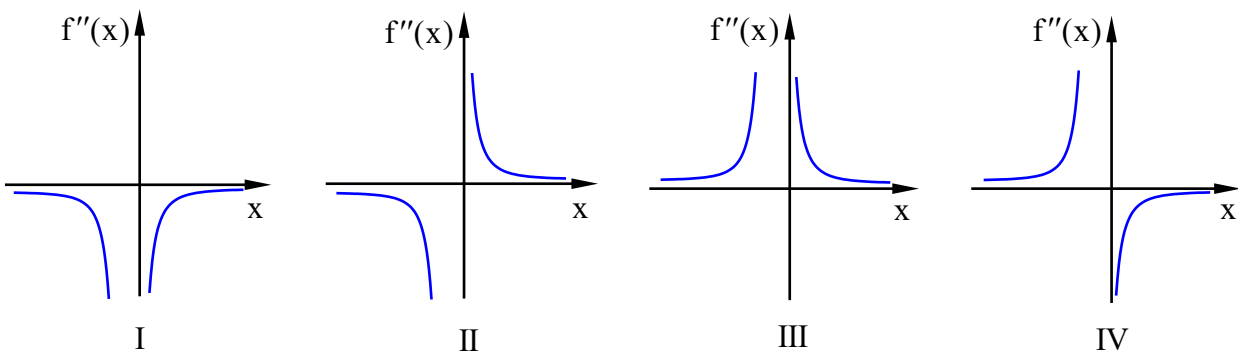
7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + x}}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.
- (3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
- (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. היעזרו בגרף הפונקציה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים IV-I שלהלן מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. נמקו את קביעתכם.



ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$.

8. במשולש ABC שהיקפו 8 ס"מ, נתון: 3 ס"מ = AC.

נסמן: $AB = x$. $\angle BAC = \alpha$.

א. (1) הוכיחו: $\cos \alpha = \frac{5x-8}{3x}$.

(2) היעזרו בסעיף הקודם והוכיחו:

$$\sin \alpha = \frac{4 \cdot \sqrt{-x^2 + 5x - 4}}{3x}$$

ב. (1) עבור איזה ערך של x שטח המשולש ABC יהיה מקסימלי.

(2) חשבו את שטחו המקסימלי של המשולש ABC.

נסמן ב- $f(x)$ את הפונקציה המתארת שטח המשולש ABC.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) שרטטו סקיצה המתארת גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נגדיר פונקציה: $g(x) = \int_1^x f(t) dt$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ההצלחה!
החוכמה: סרור אסאד



תשובות סופיות

1. א. 9:45

ב. 30 קמ"ש.

2. א. הוכחה.

ב. $q = 2$ או $q = -2$.

ג. (1) עולה.

(2) $k = 6$.

ד. הוכחה.

ה. $-\frac{1}{9}$.

3. א. 0.5

ב. 0.5

ג. תלויים.

ד. 0.968

4. א. הוכחה.

ב. (1) הוכחה.

(2) 60°

(3) 2

ג. (1) $2a - b$

(2) הוכחה.

(3) $\frac{3}{2}$

$$5. \text{ א. } AO = \frac{R}{\cos \alpha} \quad (1) \quad (2) \quad AB = R \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{2 \cos \beta}{\cos \alpha}}$$

ב. הוכחה.

ג. $\beta = 39.12^\circ$, $\alpha = 60.67^\circ$

6. א. (1) $g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$. לא (2)

(3) לא. (4) ערכי הפונקציות שווים ל- ± 1 .

ב. אסימפטוטות: $f(x)$: $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$. $g(x)$: $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$

נקודות חיתוך עם ציר ה- x : $f(x)$: $(-\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{3\pi}{4}, 0)$

$g(x)$: אין נקודות חיתוך עם הצירים. יש לה נקודות חור: $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, 0)$

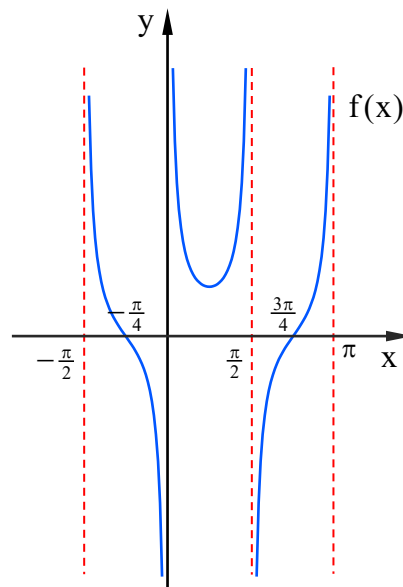
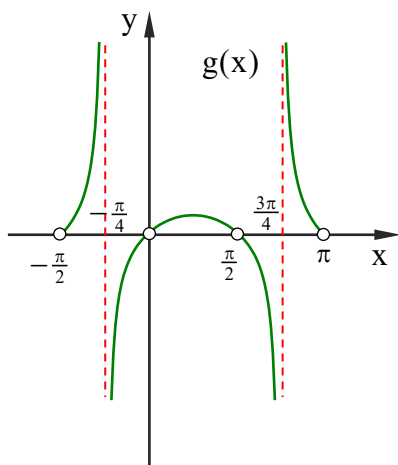
ג. (1) $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ מינימום, תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

תחומי ירידה: $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$

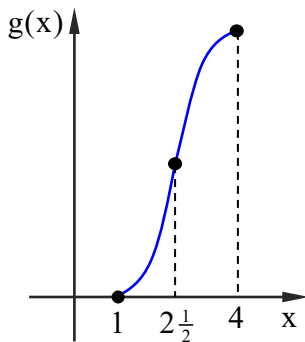
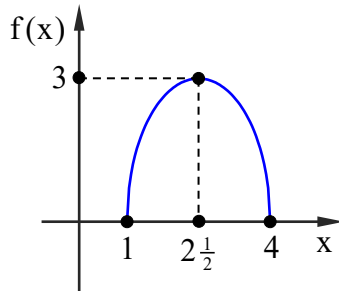
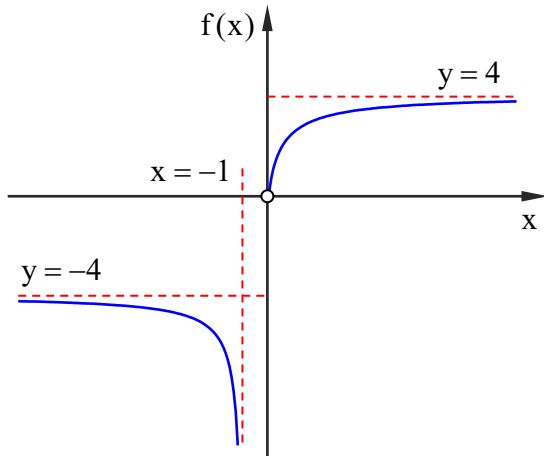
(2) מקסימום. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$

תחומי ירידה: $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

(3) סקיצות:



ד. 4 נקודות.



7. א. $x < -1, x > 0$ (1)

(2) לא.

(3) $x \rightarrow -\infty = -4, x \rightarrow \infty: y = 4, x = -1$

ב. סקיצה:

ג. גרף I.

ד. 0.435.

8. א. (1) הוכחה.

(2) הוכחה.

ב. $x = 2\frac{1}{2}$ (1)

(2) 3 סמ"ר.

ג. $1 \leq x \leq 4$ (1)

(2) סקיצה:

ד. (1) עולה לכל x בתחום $1 < x < 4$.

(2) $x = 1$ מינימום, $x = 4$ מקסימום.

(3) סקיצה: