



מבחן מתכונת 1 - כיתה י' תשפ"ג

שאלון 035581

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.

משך המבחן: שלוש שעות וחצי.

מבנה השאלון: במבחן 8 שאלות, עליך לענות על 5 שאלות, לפחות שאלה אחת מכל פרק.

במקרה של מענה על יותר מ-5 שאלות, תיבדקנה 5 השאלות הראשונות שבמחברתך בלבד!

מפתח ההערכה: ניקוד שווה לכל שאלה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.

הבהרות: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. אלון יצא בשעה 8:00 ביום ראשון מביתו ורכב על האופנוע שלו במהירות קבועה לעבר מקום A הנמצא במרחק 280 ק"מ מביתו. לאחר שעבר מרחק של 80 ק"מ, התגלה תקר באחד מגלגליו והוא נאלץ להתעכב במשך חצי שעה לתיקונו. לאחר מכן המשיך לרכב במהירות הגבוהה ב-20 קמ"ש ממהירותו ההתחלתית. אלון הגיע למקום A באותה השעה בה היה מגיע לו רכב כל הדרך במהירות בה רכב לפני התקר, ללא הפסקה. **א.** באיזו שעה התגלה התקר בגלגל?

ביום שני יצא אלון מביתו ברכיבה על האופנוע במטרה להיפגש עם חברו ניב שיצא לעברו מ-A רכוב על אופנוע. אלון וניב יצאו בו-זמנית זה לקראת זה. המהירות בה רכב אלון ביום שני הייתה גבוהה מהמהירות בה רכב אלון ביום ראשון לפני התקר בגלגל האופנוע, ונמוכה מהמהירות בה רכב ביום ראשון אחרי התקר. מהירותו של ניב מהווה 75% ממהירותו של אלון ביום שני.

ב. (1) באיזה תחום מספרי נמצא מספר השעות שרכבו שני החברים עד שנפגשו?

(2) לאחר שנפגשו ניב ואלון, הם יצאו בו-זמנית ממקום המפגש ונסעו בחזרה כל אחד לנקודת המוצא שלו, במהירות בה נסעו עד לנקודת המפגש. באותו הזמן שיצאו, יצאה גם רונית מביתו של אלון

לעבר הנקודה A במהירות קבועה של 108 קמ"ש.

לאחר שעה ו-20 דק', הייתה רונית במרחק שווה מאלון ומניב.

מצאו את מהירותו של אלון ביום שני.



2. נתונה סדרה חשבונית A , שהפרשה הוא d , המקיימת לכל k טבעי:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} = 2k^2 + 4kn$$

א. (1) הביעו את a_{n+1} ואת a_{n+3} באמצעות n .

(2) מצאו את a_1 .

בסדרה יש $3n$ איברים. נתון כי סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנתונה הוא 360.

ב. מצאו כמה איברים בסדרה הנתונה.

ג. נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת B : b_1, b_2, b_3, \dots שסכומה הוא S ומנתה היא $\frac{3}{d}$.

$$250 < S < 270.$$

האם ייתכן ש b_1 הוא אחד מאיברי הסדרה A ?

אם כן – מצאו את מיקום האיבר בסדרה A , אם לא – נמקו מדוע.

ד. מחליפים את הסימנים של כל האיברים בסדרה B שמקומם מתחלק ב-3 (ללא שארית).

חשבו את סכום הסדרה B לאחר השינוי.

3. בקופה ישנם 25 מטבעות: 3 מטבעות של 10 שקלים, x מטבעות של 5 שקלים והשאר המטבעות של שקל אחד.

מוציאים מטבע מהקופה, משאירים אותו בחוץ ומוציאים מטבע נוסף. ההסתברות שהוצאו שני מטבעות מאותו סוג היא 0.43.

ידוע שמספר המטבעות של שקל אחד גדול ממספר המטבעות של 5 שקלים.

א. מצאו את x .

ב. ידוע שהוצאו שני מטבעות מסוגים שונים.

(1) מה ההסתברות שסכום הכסף שהוצא אינו עולה על 10 שקלים?

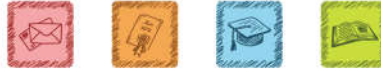
(2) מה ההסתברות שכל המטבעות של שקל אחד שנתרו בקופה גדול פי 2 ממספר המטבעות של 5 שקלים?

שקלים?

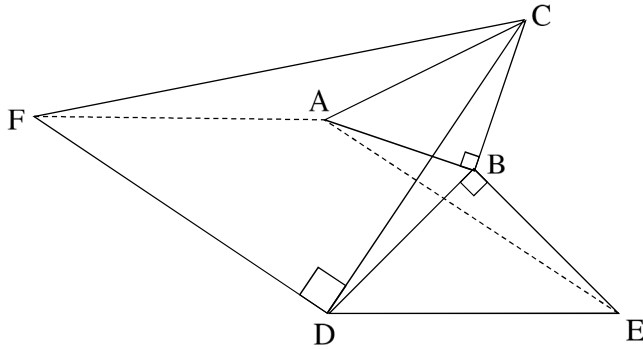
ג. מחזירים את כל המטבעות לקופה ומוציאים בזה אחר שני מטבעות מהקופה (ללא החזרה). על סדר פעולות זה חוזרים 5 פעמים (לאחר כל הוצאת שני מטבעות מחזירים את המטבעות לקופה).

ידוע שבכל פעם הוצאו שני מטבעות שונים.

מה ההסתברות שסכום כל 10 המטבעות שהוצאו מהקופה במהלך 5 הניסיונות קטן מ 40 שקלים?



פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. נתונים שלושה משולשים ישרי זווית ושווי-שוקיים :

$$\triangle FDC, \triangle BDE, \triangle ABC$$

$$.(FD = DC, AB = BC, DB = BE)$$

א. (1) הוכיחו: $AE = DC$.

(2) הוכיחו: המרובע AEDF הוא מקבילית.

ב. נתון: DE משיק למעגל החוסם את המשולש

$$\triangle FDC$$

(1) הוכיחו: הנקודה A נמצאת על הקטע FC.

(2) נתון: $\frac{S_{ABC}}{S_{DBE}} = 4$. חשבו את היחס: $\frac{S_{ABDF}}{S_{DBE}}$.

5. אלכסוני המרובע ABCD, DB ו-AC, חותכים את

המעגל בנקודות F ו-G, בהתאמה.

הנקודה E היא נקודת החיתוך של אלכסוני המרובע.

ידוע כי המרובע GFBC הוא בר-חסימה במעגל.

נתון: $CE = 10, DB = 12, AC = 15$.

א. חשבו את אורך הקטע DE.

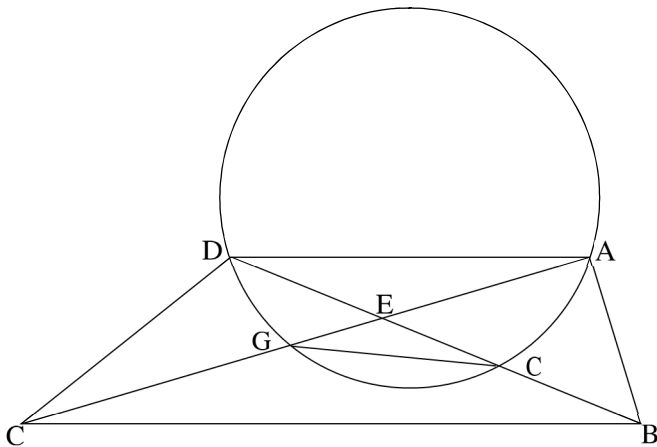
ב. נתון: $CD = 1.5AB$.

חשבו את היקף המרובע ABCD.

ג. נתון: $CF = m \cdot FA$.

הביעו באמצעות m את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המרובע ADGF לבין רדיוס המעגל

החוסם את המרובע GFBC.





פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות רציונליות, פונקציות שורש

ופונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2(\sin x + \sqrt{\cos 2x})}{\sin x}$ בתחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה בתחום הנתון.

(2) הראו כי קיימת בדיוק נקודת חיתוך אחת של גרף הפונקציה עם ציר ה- x , ומצאו את שיעוריה.

ב. (1) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם קיימות).

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$.

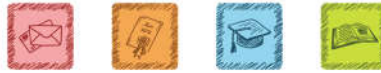
נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}$.

ד. (1) הוכיחו שהפונקציה $g(x)$ היא אי-זוגית.

(2) ללא חקירה נוספת, מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

הסבירו שיקוליכם.

ה. כתבו דוגמה לפונקציה קדומה של $(g(x))^2$.



7. נתונות שתי פונקציות: $h(x) = \frac{12x}{(3x+2)^2}$, $g(x) = \frac{9x^2}{(3x+2)^2}$

א. עבור כל אחת מהפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$, מצאו את:

(1) האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(2) נקודות הקיצון.

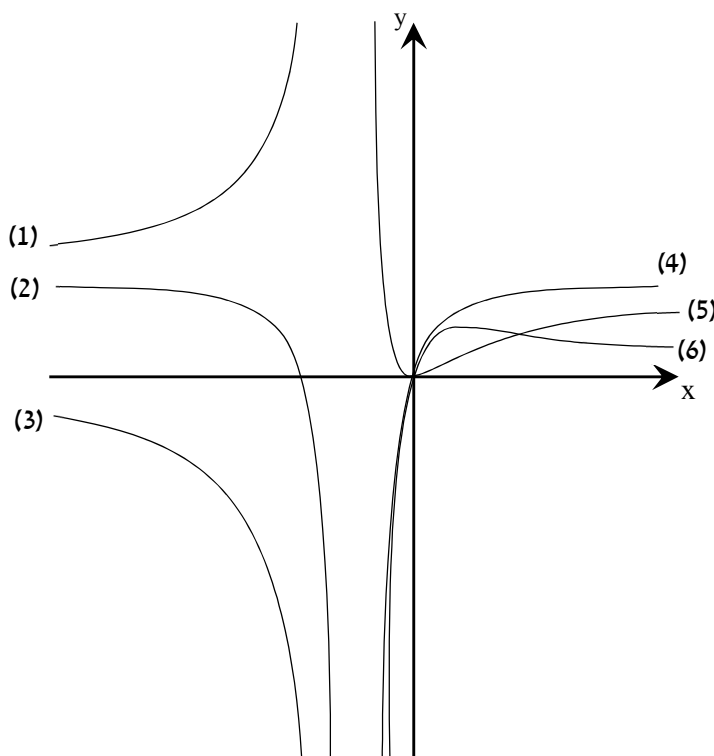
(3) נקודות החיתוך עם הצירים.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = g(x) + h(x)$.

(1) הוכיחו: $f(x) = 1 - \frac{4}{(3x+2)^2}$.

(2) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.



ג. לפניכם סרטוט הגרפים של שלוש

הפונקציות $h(x)$, $g(x)$ ו- $f(x)$.

כל אחד מחלקי הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.

רשמו לאיזו פונקציה שייך כל אחד מן החלקים המסומנים בסרטוט. נמקו תשובתכם.

ד. נתונה הפונקציה: $t(x) = |h(x)|$.

חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של

הפונקציות $t(x)$, $g(x)$ והישר $x = -4$.



8. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$.

א. חקרו את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- (1) מצאו את תחום ההגדרה.
- (2) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- (3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. בנקודה כלשהי P הנמצאת על גרף הפונקציה מעבירים משיק לגרף הפונקציה ואנך למשיק.

(1) הראו כי האנך למשיק בנקודה P חותך את ציר ה- x בנקודה קבועה M שאינה תלויה בשיעורי הנקודה P , ומצאו את שיעורי הנקודה M .

(2) הראו כי כל נקודה על גרף הפונקציה נמצאת במרחק קבוע מהנקודה M .

ג. היעזרו בסעיף ב' וחשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה- x .

ד. מעבירים ישר מקביל לציר ה- x החותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו- B .

הנקודות A ו- B ונקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x יוצרות טרפז. מצאו את שיעורי הנקודות A ו- B עבורם שטח הטרפז הוא מקסימלי.

בהצלחה!



תשובות סופיות

1. א. 80 קמ"ש (1) בין שעה ו-36 דקי לשעתיים (2) 96 קמ"ש.

2. א(1) $a_{n+1} = 4n + 2$, $a_{n+3} = 4n + 10$ א(2) $a_1 = 2$ ב. 18 ג. $b_{17} = 66$.

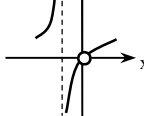

ד. $135 \frac{21}{37}$

3. א. $x = 7$ ב(1). $\frac{35}{57}$ ב(2) $\frac{5}{19}$ ג. 0.36163

4. א(1) הוכחה א(2) הוכחה ב(1) הוכחה ב(2) 5.

5. א. 4 ב. 37.53 ג. $\frac{1}{m}$

6. א(1). $-\frac{\pi}{4} \leq \pi < 0$, $0 < \pi \leq \frac{\pi}{4}$ א(2) $(-0.615, 0)$ ב(1). $\max\left(-\frac{\pi}{4}, 2\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

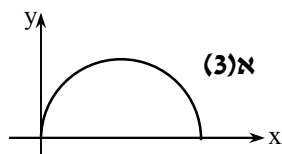
ד(2). $\max\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ ד(1) הוכחה ג.  ב(2)  ה. $\frac{1}{\tan x} - 2x$

7. א. $x = -\frac{2}{3}$, $y = 1$ א(1) $g(x)$ ב(2) $(0, 0)$ min א(3) $(0, 0)$

ב(1) $h(x)$: $x = -\frac{2}{3}$, $y = 0$ ב(2) $\max\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ א(3) $(0, 0)$

ב(1) הוכחה. ב(2) $(0, 0)$, $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ ב(3) עלייה: $x > -\frac{2}{3}$, ירידה: $x < -\frac{2}{3}$

ג. א(1) $f(x) \rightarrow (2), (4)$, $g(x) \rightarrow (1), (5)$, $h(x) \rightarrow (3), (6)$ ד. $2 \frac{2}{15}$



א(3)

8. א(1). $0 \leq x \leq 4$ ב(2) $\min(0, 0)$, $\max(2, 2)$, $\min(4, 0)$

ב(1) $M(2, 0)$ ב(2) הוכחה.

ג. 2π ד. $A(1, \sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{3})$