

סרור אסעד

17

טבחני מתכונת במתמטיקה

5 יח"ל - שאלון 035582



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



$$A = \frac{1}{2} b^2$$

$$V = l \times w \times h$$

$$\sin A = a/c$$



ק"פ 2022



math007@gmail.com

עזרה במתמטיקה

$$A = \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$

**שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.**

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
עליך לענות על שלוש שאלות, לפחות אחת מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/ המשך מעבר לדף /

עבחן עס' 1

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. הנקודה $(t, 0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית. t הוא פרמטר חיובי.

אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$.

בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות t , אם יש צורך.

א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.

המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו- B . הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B .

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

ישר המאונך לציר ה- x , עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות, C ו- D .

הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D .

ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו- D .

ד. (1) הסבר מדוע ארבע הנקודות A, B, C, D נמצאות על מעגל אחד.

(2) מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.

2. נתונים שני מישורים: $\pi_1: z - 3 = 0$, $\pi_2: ay + z - 8 = 0$. a הוא פרמטר שונה מ-0.

הזווית בין המישורים היא 45° .

א. מצא את הערכים האפשריים בעבור הפרמטר a .

הנקודה $A(2, -2, 6)$ נמצאת על אחד המישורים הנתונים. מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.

האנך חותך את המישור האחר בנקודה B .

ב. מצא את אורך הקטע AB .

ג. ℓ הוא ישר החיתוך בין שני המישורים π_1 ו- π_2 .

ד. מצא את ההצגה הפרמטרית של ℓ .

מן הנקודה B העבירו אנך לישר ℓ . האנך חותך את הישר ℓ בנקודה C .

ד. מצא את שטח המשולש ABC (תוכל לסרטט את המשולש במערכת צירים לשם כך).

$$z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$$

$$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$$

a הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו- z_2 צמודים זה לזה.

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב-ג.

נתונים המספרים: $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי:

(1) המספר w_1 הוא מספר ממשי.

(2) המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה: $|z - p| = m$. p ו-m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב.

מה הם הערכים של p ו-m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים

w_1 ו- w_2 לכל n טבעי? נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את m .

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1$.

ג. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0 < t < \ln 4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x) dx$ הוא מקסימלי. נמק את תשובתך.

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{(\ln(x))^2 - 1}$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

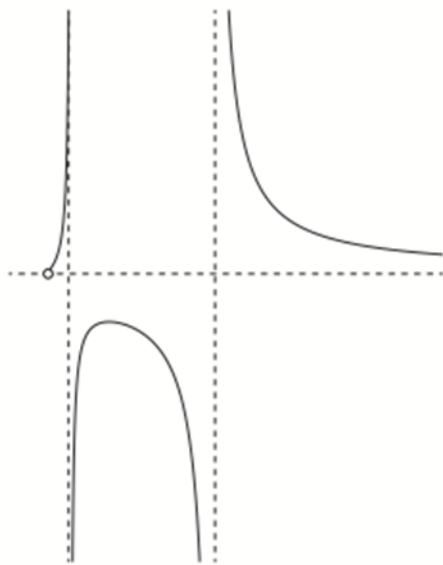
ב. לפניך שלושה גרפים שבהם לא מסומנים הצירים x ו- y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של

הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת.

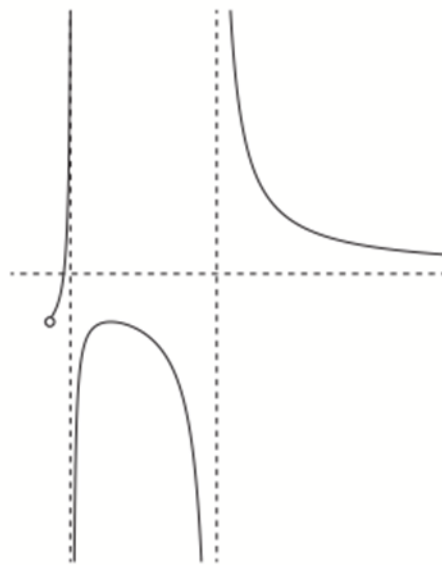
קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים.

פרט את שיקולך.

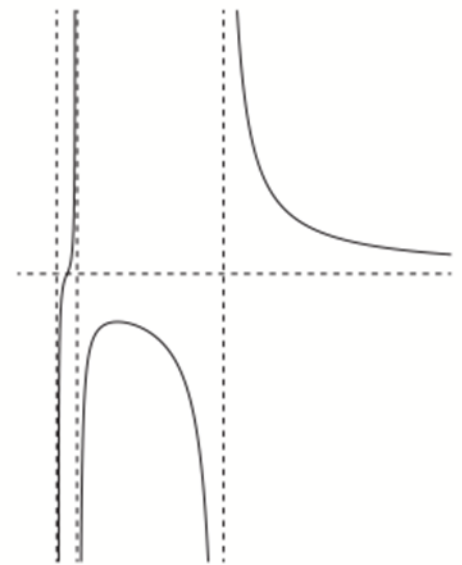
גרף ג



גרף ב



גרף א



ג. (1) האם יש פתרון למשוואה $f(x) = 1$? נמק את תשובתך.

(2) מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד? נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות: $h(x) = (\ln(x))^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$

נסמן מלבן ABCD. הנקודות A ו-B הן שתי נקודות על ציר ה- x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת.

הנקודות C ו-D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

ד. מהו שטח המלבן ABCD? נמק את תשובתך.

בהצלחה!

משוואות סופיות

5. א. (1) $x \neq \frac{1}{e}, e, x > 0$
 ב. (2) $y = 1, x = \frac{1}{e}, x = e$
 ג. (3) תחומי עלייה: $0 < x < \frac{1}{e}$ או $\frac{1}{e} < x < 1$
 תחומי ירידה: $e < x$ או $1 < x < e$
 ד. גרף ג'.
 ג. (1) לא.
 ב. (2) $k = 0$
 ד. $S = \frac{2e^2 - 2}{e} = 2(e - \frac{1}{e})$

1. א. משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1$
 משוואת הפרבולה: $y^2 = 4tx$

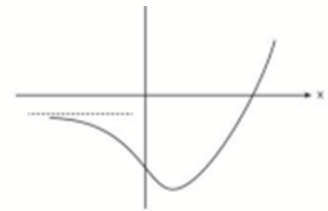
- ב. $A(-t, \frac{3t}{2}), B(-t, -\frac{3t}{2})$
 ג. $C(t, 2t), D(t, -2t)$
 ד. (1) טרפז שווה שוקיים.
 (2) $(\frac{7t}{16}, 0)$

2. א. $a = \pm 1$
 ב. 3

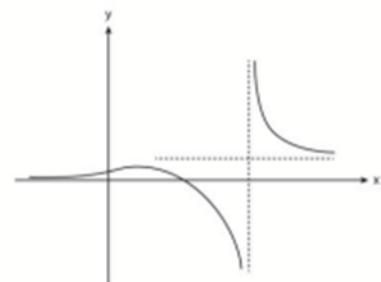
ג. $x = (0, -5, 3) + t(1, 0, 0)$
 ד. 4.5

3. א. $a = -1$
 ב. (1) הוכחה.
 (2) הוכחה.
 ג. $m = 1, p = 0$

4. א. (1) כל x
 ב. (2) $m = -4$
 ג. (3) $(\ln 4, 0), (0, -1.5)$
 ד. (4) $\min(\ln \frac{3}{2}, -\frac{25}{16})$



- ג. (1) $x \neq \ln 4$
 (2) $y = 0, y = 1, x = \ln 4$
 ד.



ה. $t = \ln 3$

עבחן עס' 2

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. מעגל שמרכזו בנקודה M חסום במשולש ABC. הצלע AB נמצאת על הישר $2x + y - 13 = 0$ והצלע AC נמצאת על הישר $-x + 2y + 4 = 0$. מרכז המעגל M נמצא על הישר $y = x - 1$. ראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש ABC. א. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש ABC. נתון כי הישר BM מאונך לציר ה-x. ב. מצא את משוואת הצלע BC. ג. מצא את המרחק בין מרכז המעגל החסום במשולש ABC ובין מרכז המעגל החסום את המשולש הזה.

2. נתונה מנסרה ישרה ABCDA'B'C'D', שבסיסה הוא מעוין ABCD (ראה סרטוט).

נקודה F נמצאת על המישור ACD' כך ש: $\overrightarrow{D'F} = t\overrightarrow{D'A} + \frac{1}{4}\overrightarrow{D'C}$, t הוא פרמטר.

נתון: DF מאונך למישור ACD', $\angle ADC = 120^\circ$, $|\overrightarrow{DC}| = 4$.

נסמן: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.

א. בטא את \overrightarrow{DF} באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו-t.

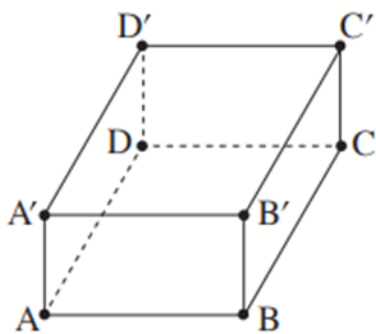
ב. מצא את t.

ג. חשב את נפח המנסרה.

נתון: הנקודה D היא ראשית הצירים, הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x,

הקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה-z, $C = (-2, \sqrt{12}, 0)$.

ד. מצא את שיעורי הנקודה F.



3. א. פתור את המשוואה: $(z + i)^2 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$, z הוא מספר מרוכב.

נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב- a_1 וב- a_2 כך ש- $a_1 < a_2$. נתונים שני מקומות גאומטריים:

$$I. |z - ia_1| = \sqrt{3}$$

$$II. |z - ia_2| = \sqrt{3}$$

ב. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

הישר $y = x$ נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים שסרטטת בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי

נקודות אחרות שמיוצגות על ידי שני המספרים המרוכבים w_1 ו- w_2 .

ג. פתור את המשוואה: $z^3 = w_1 \cdot \bar{w}_1 \cdot w_2 \cdot \bar{w}_2$, z הוא מספר מרוכב.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax}{\ln(x) - a}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ב, בטא את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך לציר ה- x העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,

על ידי הישר $x = e^{a+2}$ ועל ידי ציר ה- x , הוא 3.

ג. מצא את a .

5. נתונה הפונקציה $f(x) = 1 + ae^{-2x}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר, $a > 1$.

בטא את תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק את תשובתך.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת כאשר $x = \frac{\ln(a)}{2}$.

מצא את שיעור ה- y של נקודת הפיתול, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g'(x)$.

(2) סרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$. פרט את שיקוליך.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי הישרים $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$.

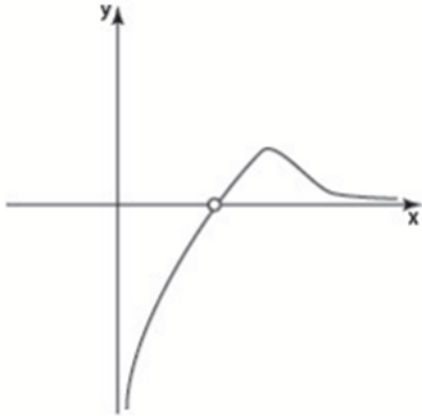
בהצלחה!

תשובות סופיות

ב. (1) $0 < x \neq e^a$

(2) מקסימום $(e^{a+1}, \frac{1}{ae^{a+1}})$

(3)



ג. $a = \frac{1}{2}$

5. א. (1) $y = 1$

(2) עליה: אין, ירידה: כל x

(3) $(0, 1+a)$

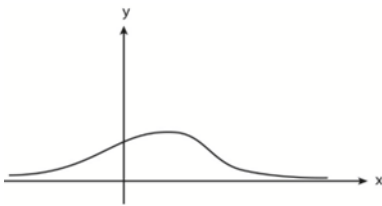
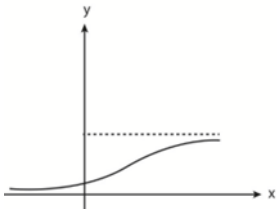
ב. (1) כל x

(2) $y = 1, y = 0$

(3) פיתול $y = \frac{1}{2}$

ג. (1) $(\frac{\ln a}{2}, \frac{1}{2})$

(2)



ד. $S = \frac{\ln a}{4} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2}$

1. א. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$

ב. $y = 2x + 1$

ג. 2.5

2. א. $\overline{DF} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + (\frac{3}{4}-t)\underline{w}$

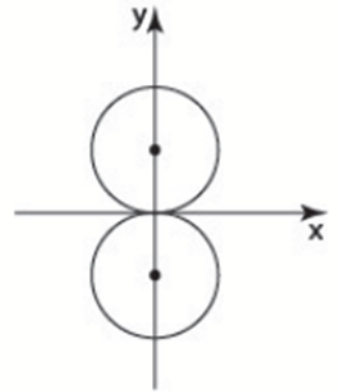
ב. $t = \frac{1}{4}$

ג. $V = 16\sqrt{3}$

ד. $F(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{12}}{4}, 1)$

3. א. $Z_1 = -\sqrt{3} - 2i, Z_2 = \sqrt{3}$

ב.

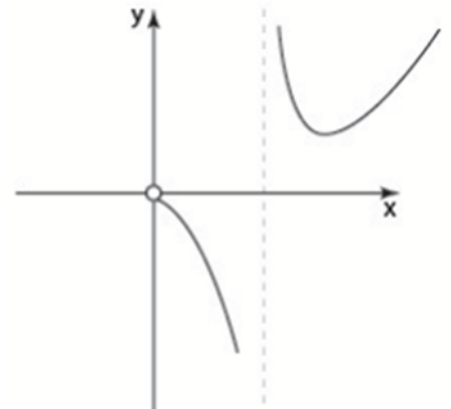


ג. $\sqrt[3]{36}cis240^\circ, \sqrt[3]{36}cis120^\circ, \sqrt[3]{36}$

4. א. (1) $0 < x \neq e^a$

(2) מינימום (e^{a+1}, ae^{a+1})

(3)



עבחן עס' 3

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון פרמטר $a > 0$.

א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a, 0)$ שווה למרחק שלהן מן הישר $x = a - 1$.

ב. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(0, a)$ שווה למרחק שלהן מן הישר $y = a - 1$.

נתון כי שני המקומות הגאומטריים שמצאת בסעיפים א-ב נחתכים בשתי נקודות. אחת הנקודות היא $(2, 2)$.

ג. (1) מצא את a .

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך האחרת.

מחברים את שתי נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים עם הנקודות $(3a, 0)$ ו- $(0, 3a)$ כך שמתקבל מרובע.

ד. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמק.

(2) חשב את שטח המרובע.

2. נתונה פירמידה מרובעת SABCD שבסיסה ABCD הוא מעוין.

נתון: \vec{SA} מאונך לבסיס הפירמידה, $\angle BAD = 60^\circ$, $SA = BA$, $\vec{SE} = t \cdot \vec{SC}$, $0 < t < 1$ הוא פרמטר.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.

א. הבע את הווקטורים \vec{EB} ו- \vec{ED} באמצעות \underline{t} , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

ב. נתון: $t = \frac{1}{2}$.

(1) הוכח כי \vec{EB} מאונך ל- \vec{ED} .

(2) הוכח כי האנך מן הנקודה E לבסיס עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים של המעוין.

נתון: $A(0, 0, 0)$, $B(6\sqrt{3}, 6, 0)$, קודקוד D נמצא על ציר ה- y בכיוון החיובי,

שיעור ה- z של הנקודה S גדול מאפס.

ג. חשב את שיעורי הקודקודים S ו- D.

ד. מצא את משוואת המישור SAB.

3. נתונה המשוואה $z^4 = -16$ (z הוא מספר מרוכב).

א. פתור את המשוואה.

נתון: פתרונות המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. סרטט במערכת הצירים את המצולע שהתקבל.

כופלים ב- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע.

ג. מצא את שיעורי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים שהתקבלו בהכפלה.

n הוא מספר טבעי, $11 < n < 17$ ו- c הוא מספר ממשי.

כל אחד מן המספרים המרוכבים שמצאת בסעיפים הקודמים מקיים את המשוואה $z^n = c$.

ד. מצא את n ואת c .

הנקודות במישור גאוס, המיוצגות על ידי כל הפתרונות של המשוואה $z^n = c$ שמצאת בסעיף ד, יוצרות

מצולע בעל n צלעות.

ה. מצא את שטח המצולע.

**פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
(4) הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון הישר: $g(x) = a \cdot x$, a הוא פרמטר.

ידוע כי $g(1) = f(1)$.

- ג. (1) מצא את a .
(2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הישר $g(x)$.

5. א. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{(x + 2)(x - 1)}\right)$.

- (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
(4) סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.

היעזר בתשובותיך על השאלות בסעיף א וענה על התת-סעיפים (1)-(3) שלפניך.

- (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך.
- ג. בעבור כל x המקיים $0 < f(x) < 1$, קבע אם המכפלה $f(x) \cdot g(x)$ חיובית. נמק את קביעתך.

בהצלחה!

משאלת סופית

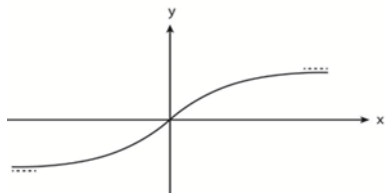
4. א. כל x

(2) $y = -1 : x \rightarrow -\infty$, $y = 1 : x \rightarrow \infty$

(3) עליה: כל x , ירידה: אין

(4) הוכחה

ב.



ג. (1) 0.761

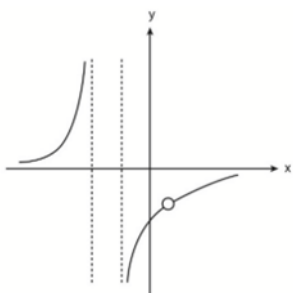
(2) 0.106

5. א. (1) $1 < x$ או $-1 < x < 1$ או $x < -2$

(2) $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$

(3) עליה: $1 < x$ או $-1 < x < 1$ או $x < -2$ ירידה: אין

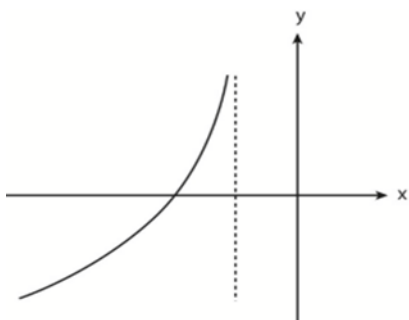
(4)



ב. (1) $x < -2$

(2) עליה: $x < -2$ ירידה: אין

(3)



ג. לא

1. א. $y^2 = 2x - 2a + 1$

ב. $x^2 = 2y - 2a + 1$

ג. $a = \frac{1}{2}$ (1)

(2) $(0, 0)$

ד. (1) דלתון

(2) 3

2. א. $\overline{ED} = (1-t)\underline{v} - t\underline{u} + (t-1)\underline{w}$, $\overline{EB} = (1-t)\underline{u} - t\underline{v} + (t-1)\underline{w}$

ב. (1) הוכחה

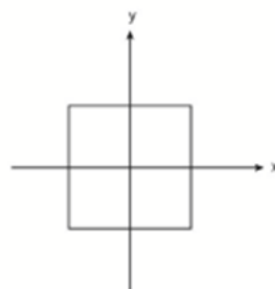
(2) הוכחה

ג. $S(0, 0, 12)$, $D(0, 12, 0)$

ד. $x - \sqrt{3}y = 0$

3. א. $2cis315^\circ$, $2cis225^\circ$, $2cis135^\circ$, $2cis45^\circ$

ב.



ג. $(0, -2)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$

ד. $c = 65536$, $n = 16$

ה. $S = 12.25$

עבחן עס' 4

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון פרמטר a שונה מאפס.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן הנקודה $(a, -1)$ שווה למרחק שלהן מן הנקודה $(-a, 1)$ הוא קו ישר. הבע את משוואת הישר באמצעות a .

נתון הישר $y = -ax$.

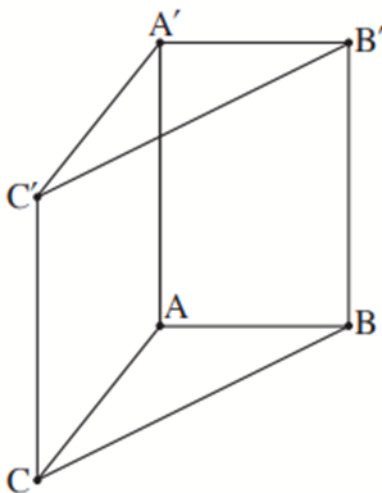
ב. מצא לאילו ערכים של a , הישר הנתון והישר שמצאת בסעיף א ניצבים זה לזה.

הישר שמצאת בסעיף א והישר הנתון ניצבים זה לזה ומשיקים לשני מעגלים, M ו- N . מרכזי שני המעגלים מונחים על ציר ה- x , המעגל M נמצא מימין לציר ה- y , והמעגל N נמצא משמאל לציר ה- y . נתון כי המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 6, והרדיוס של המעגל M גדול פי 2 מן הרדיוס של המעגל N .

ג. מצא את המשוואות של המעגלים M ו- N .

נתון הישר $-x + \sqrt{17}y - 8 = 0$. הישר משיק לשני המעגלים M ו- N .

ד. מצא משוואה של ישר המשיק לשני המעגלים, נוסף על הישרים המשיקים המתוארים בשאלה. נמק את תשובתך.



2. בסרטוט שלפניך מתוארת מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$,

שהבסיס שלה הוא המשולש ABC .

נתון המספר k שבעבורו: $\vec{AA'} = (k-1, k-7, k+1)$,

$\vec{AB} = (k-1, k, 3)$, $\vec{AC} = (k+1, 0, k-3)$.

א. מצא את ערכו של k .

המקצועות AC ו- BC מונחים על הישרים ℓ_{AC} ו- ℓ_{BC} בהתאמה:

$$\ell_{AC}: \underline{x} = (8, -1, -1) + t(k+1, 0, k-3)$$

$$\ell_{BC}: \underline{x} = (4, 0, 2) + m(k, -k, -4)$$

ב. מצא את משוואת המישור $A'B'C'$.

ג. חשב את גודל הזווית $C'A'B'$.

ד. מצא את מרכז המעגל החוסם את המשולש $A'B'C'$. נמק.

3. נתונה משוואה I : $w^2 - 4iw - 4 + 2i = 0$. הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I .

נתונה משוואה: $z^3 = a + bi$. הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים.

ידוע כי אחד מפתרונות משוואה זו מתאים לנקודה הנמצאת במישור גאוס על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

ב. אחת מן הטענות 1-3 שלפניך נכונה. קבע איזו ונמק את קביעתך.

1. $a = 0$, $b > 0$

2. $a < 0$, $b = 0$

3. $a \neq 0$, $b \neq 0$

נתונה משוואה II : $z^3 = 2(w_1 + w_2)$, w_1 ו- w_2 הם הפתרונות של משוואה I .

ג. פתור את משוואה II .

פתרונות משוואה II מייצגים קודקודים של משולש במישור גאוס.

ד. סרטט את המשולש שהתקבל במישור גאוס.

נתון מספר מדומה $u = di$, הוא פרמטר ממשי.

מוסיפים את u לכל אחד מן הפתרונות של משוואה II כך שהמספרים שמתקבלים מייצגים משולש חדש.

ה. מצא את הערך של d שבעבורו המעגל החוסם את המשולש החדש עובר דרך ראשית הצירים.

מצא את שתי האפשרויות.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{(bx^2 - 2bx)} - 1$ המוגדרת לכל x . $b < 0$ הוא פרמטר.
הבע את תשובותיך באמצעות b , אם יש צורך.
- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x (אם יש כאלה).
(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נגדיר את הפונקציה: $g(x) = f(x + a)$, a הוא פרמטר. נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון על ציר ה- y .
- ב. (1) מצא את a , ובטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות x ו- b .
(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק.
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. מצא את שיעור ה- x של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, וקבע את סוגן.
- ד. הצב $b = -0.5$, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים העוברים דרך נקודות הקיצון של $g'(x)$ ומאונכים לציר ה- x .

5. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = x \cdot (\ln(x))^n$, $n \geq 1$, הוא מספר טבעי.

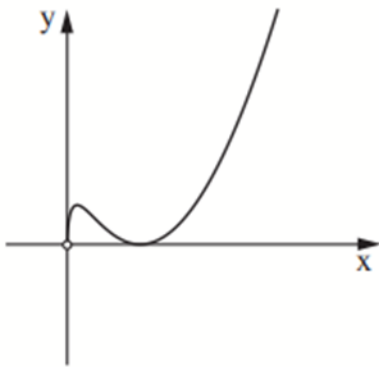
א. ענה על הסעיפים שלפניך בעבור n זוגי ובעבור n אי-זוגי. אם יש צורך, בטא את תשובותיך באמצעות n .
 (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

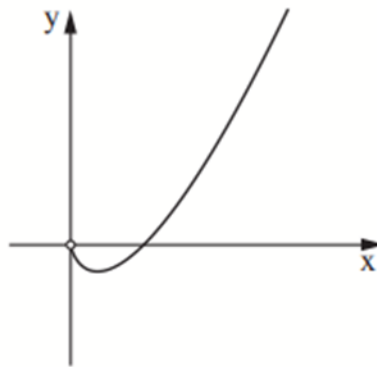
(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. כל אחד מן הגרפים א-ג שלפניך מתאר פונקציה במשפחה.

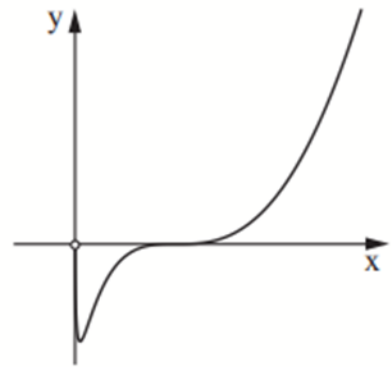
קבע איזה גרף יכול להתאים ל- $n = 1$, איזה גרף יכול להתאים ל- $n = 2$ ואיזה גרף יכול להתאים ל- $n = 3$.
 נמק את קביעותיך.



גרף א



גרף ב



גרף ג

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{e}$ ו- $x = \frac{1}{e^2}$.

בהצלחה!

משוואות סופיות

1. א. $y = ax$

ב. $a = \pm 1$

ג. $(x+2)^2 + y^2 = 2, (x-4)^2 + y^2 = 8$

ד. $x + \sqrt{17}y + 8 = 0$

2. א. $k = 2$

ב. $x - 5y + 3z - 45 = 0$

ג. 90°

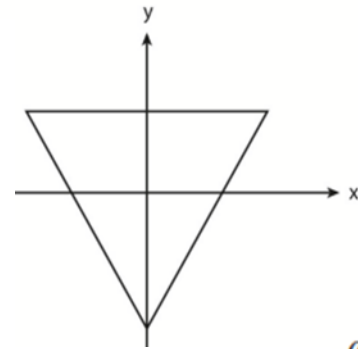
ד. $(5, -5, 5)$

3. א. $-1 + 3i, 1 + i$

ב. טענה 1

ג. $-2i, -\sqrt{3} + i, \sqrt{3} + i$ או $2cis270^\circ, 2cis150^\circ, 2cis30^\circ$

ד.



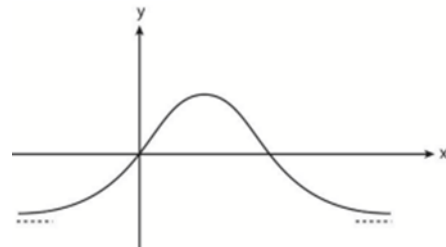
ה. $d = -2, d = 2$

4. א. (1) $(2, 0), (0, 0)$

(2) אנכית: אין, אופקית: $y = -1$

(3) מקסימום $(1, e^{-b} - 1)$

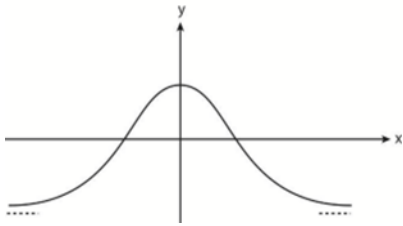
(4)



ב. (1) $a = 1$

(2) הפונקציה זוגית, $g(x) = e^{b(x^2-1)} - 1$

(3)



ג. מינימום $x = \sqrt{-\frac{1}{2b}}$, מקסימום $x = -\sqrt{-\frac{1}{2b}}$

ד. $2(\sqrt{e} - 1) = 1.297$

5. א. (1) $x > 0 : f(x), x > 0 : g(x)$

(2) n אי-זוגי: עליה: $x > \frac{1}{e^n}$, ירידה: $0 < x < \frac{1}{e^n}$

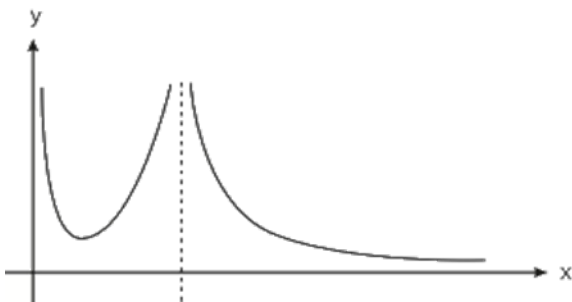
n זוגי: עליה: $0 < x < \frac{1}{e^n}$ או $x > 1$, ירידה: $\frac{1}{e^n} < x < 1$

(3) n אי-זוגי: $(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n})$ מינימום

n זוגי: $(1, 0)$ מינימום, $(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n})$ מקסימום.

ב. גרף א': $n = 3$, גרף ב': $n = 1$, גרף ג': $n = 2$

ג.



מבחן מס' 5

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. לפניך משוואת הפרבולה: $y^2 = 2ax$ ומשוואת המעגל: $x^2 + y^2 - 2ax - 2x = 0$. הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל. הבע באמצעות a , אם יש צורך.

דרך שתיים מנקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל עובר ישר ששיפועו חיובי.

ב. מצא את משוואת הישר. הבע באמצעות a , אם יש צורך.

ממרכז המעגל מעבירים אנך לישר. אורך האנך הוא $2\sqrt{5}$.

ג. (1) הבע באמצעות a את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.

(2) מצא את a .

מגדירים מעגל חדש שמרכזו זהה למרכז המעגל הנתון והרדיוס שלו קטן ב-2 מרדיוס המעגל הנתון.

ד. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל החדש שווה למרחק שלהן

מן הישר $x = -4$.

2. ABC הוא משולש.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.

נתון: $A(0, 2, -1)$, $B(-3, 2, 2)$,

הנקודה $D(-2, 3, 1)$ נמצאת על הקטע BC כך ש- $\vec{AD} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$.

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה C והוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

(2) מצא את משוואת המישור ABC.

הנקודה E נמצאת במישור ABC כך ש- ABEC הוא מלבן. הנקודה M היא מפגש האלכסונים במלבן זה.

S היא נקודה כך ש- MS מאונך למישור ABEC.

ב. (1) מצא הצגה פרמטרית לישר MS, והסבר מדוע לכל נקודה S כזו SABEC היא פירמידה ישרה.

(2) תן דוגמה לשיעורים של נקודה S כמתואר בתת-סעיף ב(1).

בעבור הנקודה S שמצאת, חשב את הזווית SAB.

(3) בעבור הנקודה S שמצאת, האם קיימת נקודה נוספת, P, כך ש- PABEC היא פירמידה ישרה שבעבורה

מתקיים $\sphericalangle SAB = \sphericalangle PAB$?

אם כן, מצא את שיעוריה. אם לא, נמק.

3. נתונה משוואה I: $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I.

פתרונות המשוואה מיוצגים על ידי כל הקודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה משוואה II: $(a \cdot z^2 + b)(z + 1) = 0$. z הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים השונים מאפס.

ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי $a \cdot b > 0$.

ד. מצא את פתרונות משוואה II. הבע באמצעות a ו- b , אם יש צורך.

ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים

והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I.

ה. מצא את היחס $\frac{b}{a}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-4}{e^{2x} - 4e^x + 3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הסבר מדוע לכל $b < 0$ מתקיים: $\int_{b-3}^b f(x) dx < -4$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{k}{f(x)}$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. k הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום.

ג. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור k ? נמק.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^3 - 1} + 1$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ (k הוא פרמטר). מצא את k . נמק.

ג. נגדיר $T(x) = \int_{e^{-1}}^x f(x) dx$ $e^{-1} \leq x < e$.

(1) לפניך שלושה ערכי x , (III-I). בעבור איזה מהם הערך של $T(x)$ הוא הכי גדול? נמק.

(I) $x = \frac{1}{2}$ (II) $x = 1$ (III) $x = 2$

(2) הסבר מדוע בעבור כל $e^{-1} \leq x < e$ מתקיים: $T(x) < 1$.

בהצלחה!

תשובות סופיות

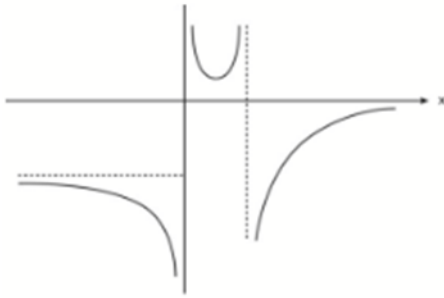
4. א. $x \neq 0, x \neq \ln 3$ (1)

(2) $y = -\frac{4}{3}, y = 0, x = \ln 3, x = 0$

(3) מינימום $(\ln 2, 4)$

(4) עלייה: $\ln 3 < x$ או $\ln 2 < x < \ln 3$

ירידה: $x < 0$ או $0 < x < \ln 2$



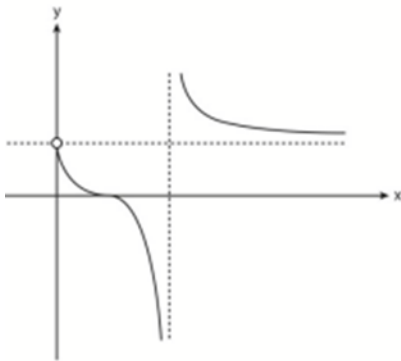
5. א. $x \neq e, x > 0$ (1)

(2) $y = 1, x = e$

(3) עלייה: אין

ירידה: $x > e$ או $0 < x < e$

(4) $(1, 0)$



(5)

ב. $k = 1$

ג. $x = 1$ (II (1))

1. א. $(0, 0), (2, 2\sqrt{a}), (2, -2\sqrt{a})$

ב. $y = \sqrt{a} \cdot x$

ג. $(1, 0)$ מרכז המעגל: $(a+1, 0)$, רדיוס: $(a+1)$

(2) $a = 4$

ד. $y^2 = 18x$

2. א. (1) $c(0, 5, -1)$, הוכחה $(AB \perp AC)$

(2) $x + z + 1 = 0$

ב. (1) $(-1.5, 3.5, 0.5) + t(1, 0, 1)$, הסבר

(2) דוגמה: $S(-0.1, 3.5, 1)$, $\sphericalangle SAB = 38.016^\circ$

(3) $p(-2, 3.5, 0)$

3. א. $z = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, z = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, z = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ב. $S = 2\sqrt{3}$

ג. הוכחה

ד. $z = -\sqrt{\frac{b}{a}}i, z = \sqrt{\frac{b}{a}}i, z = -1$

ה. $\frac{b}{a} = 8$

עבחן עס' 6

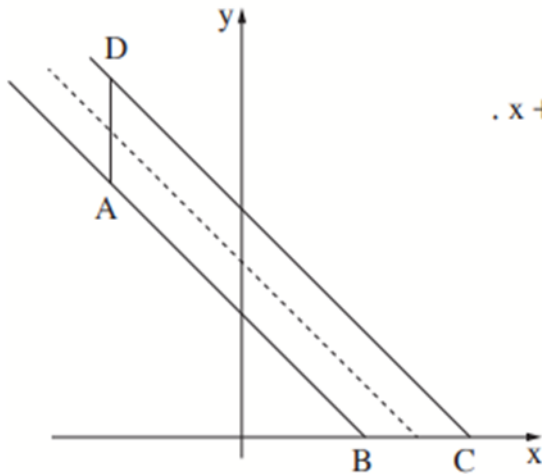
השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. ABCD הוא טרפז (AB || DC).



נתון: המרחק בין בסיסי הטרפז, AB ו-DC, הוא $\sqrt{2}$.

קטע האמצעים של הטרפז ABCD נמצא על הישר $x + y - 4 = 0$.

א. מצא את משוואות הישרים שבסיסי הטרפז נמצאים עליהם.

נתון: השוק BC נמצאת על ציר ה-x.

מעבירים פרבולה קנונית $y^2 = 2px$ ($p > 0$)

כך שהקודקודים A ו-D של הטרפז נמצאים על מדריך הפרבולה,

ומוקד הפרבולה נמצא על הקודקוד B או על הקודקוד C.

ב. (1) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה

הטרפז ABCD הוא הגדול מבין שני הטרפזים האפשריים? נמק.

(2) מהי משוואת הפרבולה שבעבורה הטרפז ABCD הוא הקטן מבין שני הטרפזים האפשריים?

ג. מעבירים ישר המקביל לציר ה-x וחותך את שתי הפרבולות שמצאת בסעיף ב בשתי נקודות, E ו-F.

מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו מונחים אמצעי הקטעים EF הנוצרים באופן זה.

2. נתון טרפז שווה-שוקיים ABCD (AB || DC) (ראה סרטוט).

נתון: $\angle DAB = 120^\circ$.

נסמן: $\vec{DC} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = t\underline{u}$ (t הוא סקלר).

א. (1) הבע את t באמצעות $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$.

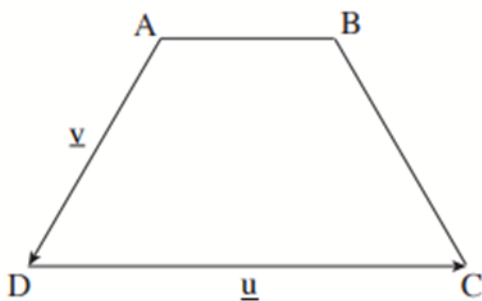
(2) הבע את הווקטור \vec{BC} באמצעות \underline{u} , \underline{v} , ו- $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$.

נתון: $\underline{v} = (-1, y, 0)$, $\underline{u} = (8, 6, -10)$.

ב. (1) מצא את שיעור ה-y של הווקטור \underline{v} (מצא את שני הערכים).

(2) עבור איזה ערך משני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף ב(1), הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז

חסום בו? נמק.



3. נתונה המשוואה $i \cdot z^6 = \frac{1}{64}$ (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך ראשית הצירים.

כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w.

ג. הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

$$\text{נתון: } w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים: פתרונות המשוואה הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו לאחר ההכפלה ב־ w.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $h(x) = f(x^2)$, $g(x) = 2 \cdot f'(x)$ בתחום $x > 0$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, קבע את סוגה, והראה כי הנקודה הזאת נמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ נפגשים בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ג. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי הישר $x = a$, $a > 1$,

שווה ל- $e^4 + 4e - 2 \cdot f(a)$.

מצא את הערך של a . תוכל להשאיר \ln בתשובתך.

5. הגרפים I, II שבסרטוט שלפניך מתארים שתי פונקציות המוגדרות בתחום $-1 \leq x \leq 4$.

אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$,

והאחר הוא של פונקציית הנגזרת שלה, $f'(x)$.

א. קבע מי מבין הגרפים I ו-II הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$. נמק.

הסתמך על הסרטוט וענה על סעיף ב.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$

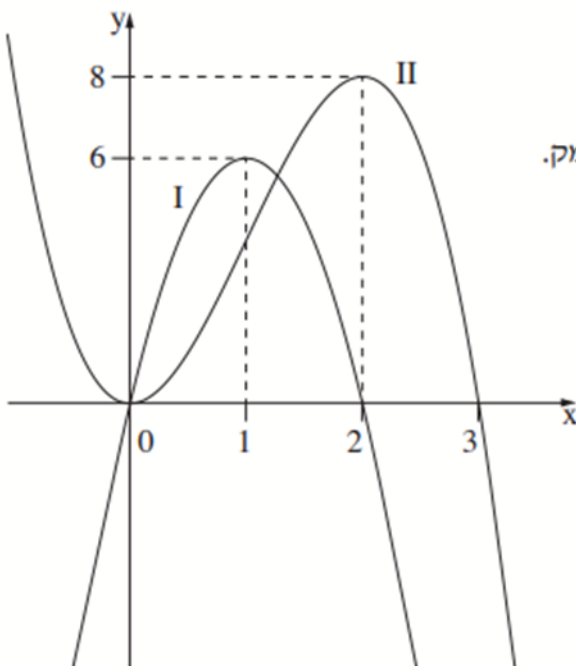
המאונכות לציר ה- x ?

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות

של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.



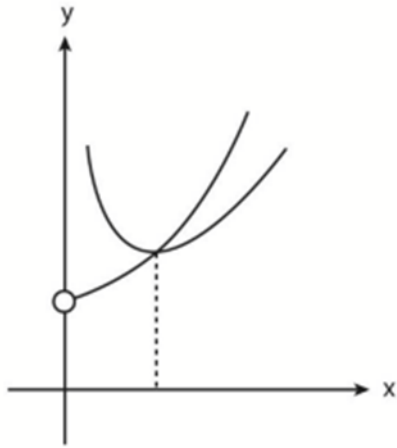
בהצלחה!

משוואות סופיות

4. א. $0 \leq x$

ב. $(1, 4e)$

ג.



ד. $a = 4 - \ln 4$

5. א. גרף II - $f(x)$

גרף I - $f'(x)$

ב. $-1 \leq x < 0$, $0 < x < 3$ (1)

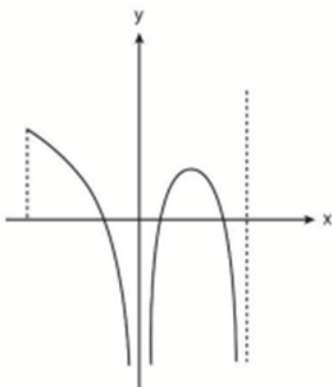
(2) $x = 0$, $x = 3$

(3) מקסימום $(2, \ln 8)$

(4) עלייה: $0 < x < 2$

ירידה: $-1 < x < 0$, $2 < x < 3$

(5)



1. א. $x + y - 3 = 0$: AB

CD: $x + y - 5 = 0$

ב. $y^2 = 20x$ (1)

(2) $y^2 = 12x$

ג. $y^2 = 15x$

2. א. (1) $t = 1 - \frac{|y|}{|u|}$

(2) $\overline{Bc} = \frac{|y|}{|u|}u + y$

ב. (1) $y = \frac{1}{7}$, $y = -7$

(2) $y = -7$

3. א. $\frac{1}{2} \text{cis} 165^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 105^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 45^\circ$

$\frac{1}{2} \text{cis} 345^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 285^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 225^\circ$

ב. הוכחה

ג. הוכחה

ד. $(z^6 - \frac{1}{64}i)(z^6 + \frac{1}{64}i) = 0$

אפשר גם: $z^{12} + \frac{1}{4096} = 0$

עבחן עס' 7

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הן שתי נקודות שונות הנמצאות על הפרבולה $y^2 = 36x$ ברביע הראשון.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר AB הוא $m = \frac{36}{y_2 + y_1}$.

(2) הנקודה $(x, 7\frac{1}{2})$ היא אמצע המיתר AB .

מצא את m .

ב. נתון: המרחק של כל נקודה על הפרבולה הנתונה מן הישר $x = a$ שווה למרחק של נקודה זו מן הנקודה $(9, 0)$.

מרחק הנקודה A מן הישר $x = 0.75a$ הוא 7 .

(1) מהו הערך של a ? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר AB .

2. נתונה התיבה $ABCD A' B' C' D'$.

הנקודה K נמצאת על המקצוע CC' .

הנקודה E היא אמצע המקצוע $A'D'$ (ראה סרטוט).

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$; $\vec{AD} = \underline{v}$; $\vec{AB} = \underline{u}$; $\vec{CK} = t \cdot \vec{CC'}$ ($t > 0$ הוא סקלר).

נתון: $|\underline{u}| = 3\sqrt{2}$; $|\underline{v}| = 6$; $|\underline{w}| = 6\sqrt{2}$.

$\angle EKB = 90^\circ$.

א. מצא את t .

נסמן ב- π את המישור $CDA'B'$.

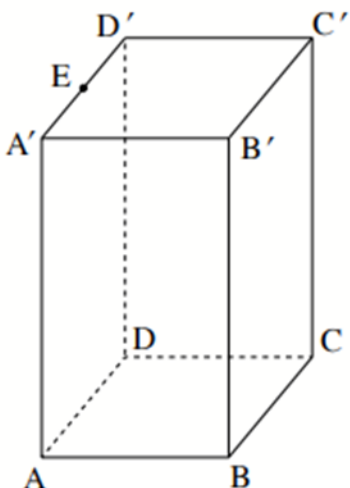
ב. (1) הוכח כי הישר BK מאונך למישור π .

(2) הסבר מדוע הישר EK מקביל למישור π .

נתון: $B(-1, 0, 1)$; $K(4, 5, -1)$.

$\underline{w} = (2, 2, -8)$.

ג. מצא את משוואת המישור π .



3. א. נתון מספר מרוכב $z = r \cdot [\cos \theta + i \cdot \sin \theta]$.

הסבר מדוע מתקיים: $r \cdot [\cos(180^\circ + \theta) + i \cdot \sin(180^\circ + \theta)] = -z$.

z_1, z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס נמצאות על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

הנקודות המייצגות את z_1 ו- z_2 נמצאות ברביע הראשון, והנקודה המייצגת את z_3 נמצאת ברביע השלישי.

נסמן $z_1 = r_1 (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$.

ב. הוכח כי המנה $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3}$ היא מספר ממשי.

נתון גם כי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_1 ו- z_3 נמצאות על מעגל היחידה, ו- $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{5}{4}$.

ג. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ד. z_4 הוא הצמוד של z_3 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_2, z_3, z_4 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x . הגרף שלה חותך את ציר ה- x בראשית הצירים בלבד.

נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הן $(1, 1)$ ו- $(-1, -1)$ בלבד.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ מתאפסת בעבור $x = 1$ ו- $x = -1$ בלבד.

ציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $g(x)$ בעבור x שואף לאינסוף ובעבור x שואף למינוס אינסוף.

א. (1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) רשום את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$ (פונקציית הנגזרת של $g(x)$).

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cdot x^2 - x^3$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

ענה על סעיפים א-ג עבור $0 < a$. הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. (1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

ג. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x .

(1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את טווח הערכים האפשריים של a שעבורם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה אחת

בלבד.

ענה על סעיף ד עבור $a = 0$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. ציין בגרף את הערכים המספריים של שיעורי נקודת החיתוך של גרף

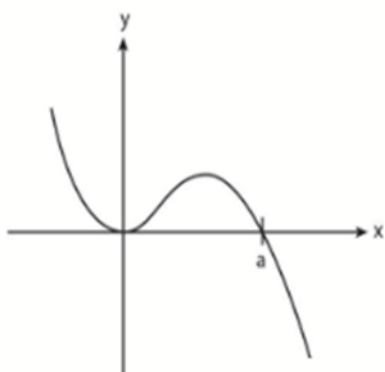
הפונקציה עם ציר ה- x .

בהצלחה!

תשובות סופיות

5. א. (1) חיובית: $0 < x < a$ או $x < 0$, שלילית: $a < x$

(2)

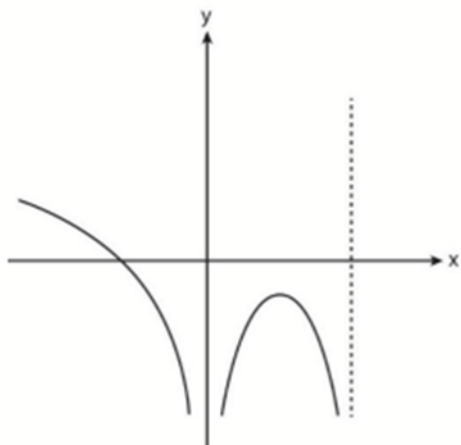


ב. (1) $x \neq 0, x < a$

(2) $x = 0, x = a$

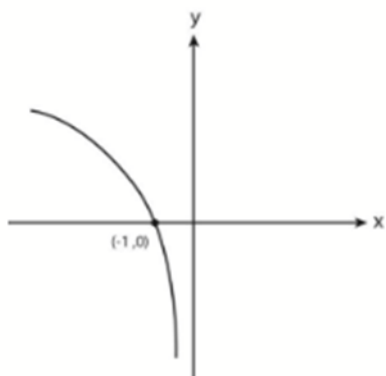
(3) מקסימום $(\frac{2a}{3}, \ln(\frac{4}{27}a^3))$

ג. (1)



(2) $0 < a < 1.889$

ד.



1. א. (1) הוכחה

(2) $m = 2.4$

ב. (1) $a = -9$

(2) $y = 2.4x + 2.4$

2. א. $t = \frac{1}{2}$

ב. (1) הוכחה.

(2) הוכחה.

ג. $5x + 5y - 2z - 29 = 0$

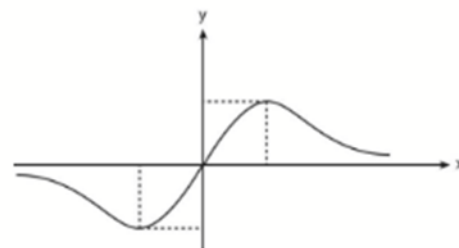
3. א. הוכחה

ב. הוכחה

ג. $|z_2| = 3.5$

ד. $2.25 \sin 2\alpha$

4. א. (1)



(2) חיובית: $-1 < x < 1$, שלילית: $x < -1, 1 < x$

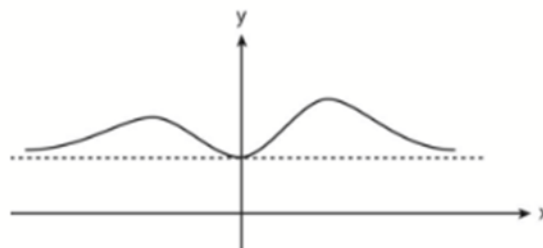
ב. (1) כל x

(2) $y = 1$

(3) מקסימום $(1, e-1)$, מינימום $(0, 1)$,

מקסימום $(-1, \frac{1}{e} + 1)$.

(4)



עבחן עס' 8

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון: נקודה K נמצאת על הפרבולה $y^2 = 4px$ ($p > 0$).
שיעור ה־y של נקודה K הוא 12.
המרחק בין נקודה K ובין מוקד הפרבולה הוא 20.
א. מצא את p (מצא את שתי האפשרויות).

- נסמן את הערכים של p שמצאת בסעיף א ב־ p_1 ו־ p_2 . $p_1 < p_2$.
ישר מן הצורה $y = mx$ ($m \neq 0$) חותך את הפרבולה $y^2 = 4p_1x$ בראשית הצירים ונקודה נוספת, A, ואת הפרבולה $y^2 = 4p_2x$ בראשית הצירים ונקודה נוספת, B.
הצב את הערכים p_1 ו־ p_2 שמצאת, וענה על סעיפים ב-ג.
ב. הבע את שיעורי נקודה A, ואת שיעורי נקודה B באמצעות m.
ג. בעבור כל ישר $y = mx$ ($m \neq 0$), נסמן ב־M את אמצע הקטע AB הנוצר באופן המתואר.
א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות M האלה (ללא m).

2. נתונים שני ישרים: $l_1: \underline{x} = (6, 10, -7) + k(3, 5, -4)$

$$l_2: \underline{x} = (15, 0, 6) + t(9, 0, 13)$$

ונתון הווקטור $\underline{u} = (6, 0, -8)$.

הנקודה A נמצאת על הישר l_1 והנקודה C נמצאת על הישר l_2 כך ש־ $\overrightarrow{AC} = \underline{u}$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו־C.

SABC היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABC, הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).

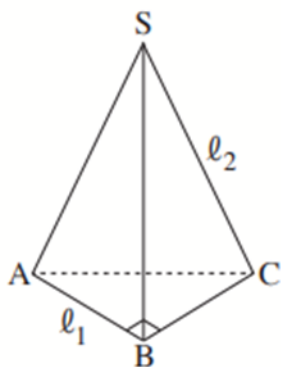
הנקודה S נמצאת על הישר l_2 והנקודה B נמצאת על הישר l_1 .

ב. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. מצא את משוואת המישור ABC.

ד. מן הנקודה C העלו אנך למישור ABC.

ה. חשב את הזווית שבין האנך ובין הישר l_2 .



3. א. פתור את המשוואה: $z^2 - (1 + i)z + 2i + 2 = 0$.

אחד הפתרונות של המשוואה שפתרת נמצא ברביע הרביעי והוא מיוצג על ידי הנקודה A במישור גאוס.

הפתרון השני מיוצג על ידי הנקודה B במישור גאוס.

דרך הנקודה B עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים – O. הישר AO חותך את המעגל בנקודות C ו- D.

במעגל חסום מצולע משוכלל בעל n צלעות.

נתון כי הנקודות B, C, D הן קודקודים של המצולע.

ב. מהו ה-n האפשרי הקטן ביותר? נמק את תשובתך.

ג. בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב:

(1) רשום את המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

(2) כתוב משוואה שפתרונותיה הם כל המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = e^x(x - 5)$, המוגדרת לכל x .
- א. הראה כי $f'(x) = e^x(x - 4)$ וכי $f''(x) = e^x(x - 3)$.
- ב. $f^{(n)}(x)$ היא הנגזרת מסדר n של $f(x)$ (למשל $f^{(3)}(x) = f'''(x)$). נתונה החוקיות: $f^{(n)}(x) = e^x(x - 5 + n)$ בעבור כל n טבעי.
- ג. מצא את $f'''(x)$, והראה כי החוקיות הנתונה מתקיימת בעבורה. ענה על סעיף ג. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות n .
- ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f^{(n)}(x)$ עם הצירים.
- (2) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f^{(n)}(x)$.
- (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f^{(n)}(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
- (4) הראה כי הגרפים של הפונקציות $f^{(m)}(x)$ ו- $f^{(k)}(x)$ אינם נחתכים בעבור שני מספרים טבעיים שונים m ו- k .
- (5) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, ו- $f''(x)$, וכתוב איזה מן הגרפים מתאים לכל אחת מן הפונקציות.
- ד. הסתמך על החוקיות הנתונה, ומצא לפונקציה $f(x)$ פונקציה קדומה, $F(x)$, אם נתון כי הגרף של הפונקציה $F(x)$ עובר בראשית הצירים. אמת את תשובתך על ידי גזירה.
5. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$, $a \neq 0$, הוא פרמטר.
- ענה על סעיפים א-ג בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה. נתון כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה $g(x) = f'(x)$ (נגזרת הפונקציה $f(x)$) המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$. נתון: $a > 0$.
- ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x = \frac{2}{a}$ וציר ה- x , והוכח כי השטח אינו תלוי ב- a .

בהצלחה!

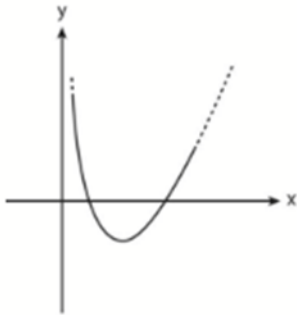
תשובות סופיות

5. א. $0 < x : 0 < a$

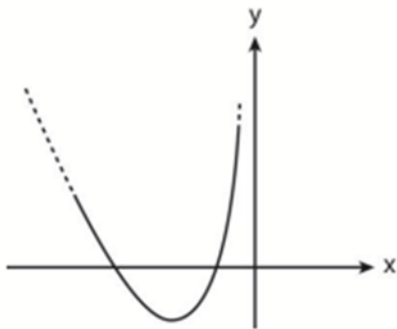
ב. $x < 0 : a < 0$

ג. מינימום $(\frac{1}{a}, 1 + \ln a^2)$

ד. $0 < a$



א. $a < 0$



א. $1 - \ln 2$

1. א. $P = 18, P = 2$

ב. $A = (\frac{8}{m^2}, \frac{8}{m}), B(\frac{72}{m^2}, \frac{72}{m})$

ג. $y^2 = 40x$

2. א. $A(0,0,1), C(6,0,-7)$

ב. $B(3,5,-3)$

ג. $4x + 3z - 3 = 0$

ד. 18.43°

3. א. $Z_2 = 2i, Z_1 = 1 - i$

ב. $n = 8$

ג. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 2), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (2, 0)$

$(0, -2), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-2, 0)$

$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$Z^8 = 256$ (2)

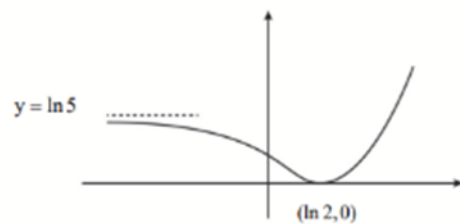
4. א. (1) כל x .

(2) התוכן גדול מ-1 לכל x .

(3) $y = \ln(b^2 + 1)$

(4) $b > 0, \min(\ln b, 0)$

(5)



ב. $b = 2, b = -2$

ג. עבור $b = -2$ אין נקודות קיצון והפונקציה $f(x)$ עולה.

עבחן מס' 9

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. OMG הוא משולש. הנקודה O היא ראשית הצירים.

מן הנקודה $M(2, 6)$ הורידו גובה לצלע OG .

נתון כי אורך הגובה שהורידו הוא 6.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות G המתקבלות באופן הזה נמצא על שני ישרים, ומצא את משוואותיהם של הישרים.

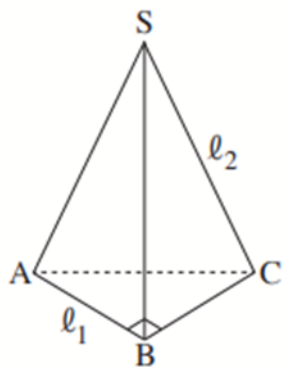
מעגל שמרכזו בנקודה M משיק לשני הישרים שמצאת בסעיף א בנקודות P ו- Q .

ב. (1) רשום את משוואת המעגל.

(2) מצא את שיעורי הנקודות P ו- Q .

ג. האם המרובע $OPMQ$ הוא בר חסימה במעגל? נמק.

אם כן, מצא את משוואת המעגל החוסם אותו.



2. נתונים שני ישרים: $l_1: \underline{x} = (6, 10, -7) + k(3, 5, -4)$

$l_2: \underline{x} = (15, 0, 6) + t(9, 0, 13)$

ונתון הוקטור $\underline{u} = (6, 0, -8)$.

הנקודה A נמצאת על הישר l_1 והנקודה C נמצאת על הישר l_2 כך ש- $\overrightarrow{AC} = \underline{u}$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-C.

SABC היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABC, הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).

הנקודה S נמצאת על הישר l_2 והנקודה B נמצאת על הישר l_1 .

ב. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. מצא את משוואת המישור ABC.

ד. מן הנקודה C העלו אנך למישור ABC.

חשב את הזווית שבין האנך ובין הישר l_2 .

3. z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים שונים.

נתון: $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $z_2 = \cos \frac{7\alpha}{3} + i \sin \frac{7\alpha}{3}$,

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,

הוא מספר ממשי.

א. (1) מצא את α ואת $\frac{z_1}{z_2}$.

(2) הראה כי $z_1 \cdot z_2$ הוא מספר מדומה.

נתון: $w = \frac{z_1}{z_2} + z_1 \cdot z_2$.

ב. מצא את כל פתרונות המשוואה $z^3 = w^6$.

ג. (1) האם הפתרונות שמצאת בסעיף ב יכולים להתאים לקודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס?

אם כן, מצא את שיעוריהם של שאר קודקודי המשושה.

(2) תן דוגמה למספר טבעי $n > 6$ שבעבורו הפתרונות שמצאת בסעיף ב מהווים קודקודים של מצולע משוכלל

בעל n קודקודים.

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln((e^x - b)^2 + 1)$. b הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות b .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) נמק מדוע $f(x) \geq 0$ בכל תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את המשוואה של האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(4) קבע בעבור אילו ערכים של b יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון,

ואם יש כזאת, מצא את שיעוריה, והראה שהיא נקודת מינימום.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $b = 2$.

ב. מצא את כל הערכים של b שבעבורם הישר $y = \ln 5$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ג. נתון כי בעבור אחד מן הערכים של b שמצאת בסעיף ב, אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון.

בעבור הערך הזה של b , קבע אם הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת. נמק.

5. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x .

א. הראה כי לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x ונקודות הקיצון הללו הן מאותו הסוג (מינימום/מקסימום).

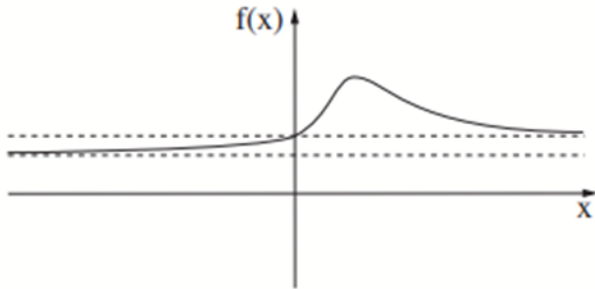
בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, כך ש- $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה ששיעוריה הם $(1, 2)$, ושתי אסימפטוטות:

אסימפטוטה שמשוואתה היא $y = 1$,

ואסימפטוטה נוספת שמשוואתה היא $y = \frac{2}{3}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y כאשר $y = 1$.

ענה על סעיף ב בהסתמך על הגרף המתואר בציור.



ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

(3) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

(4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x) = f(x) - g(x)$.

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

קבע את סוגן בעזרת הגרף.

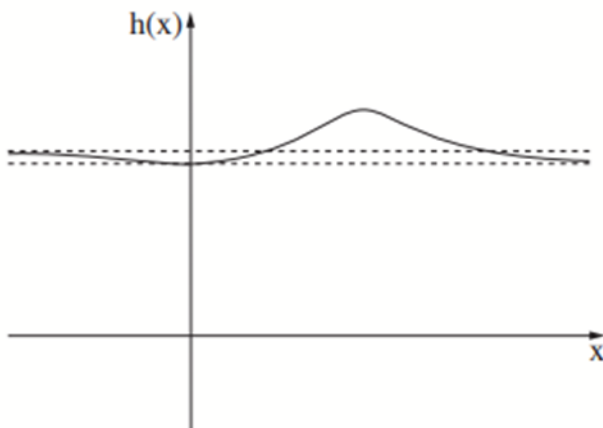
(2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

כך שהקטע AB מאונך לציר ה- x .

מהו שיעור ה- x שבעבורו אורך הקטע AB הוא 1?

נמק.



בהצלחה!

משוואות סופיות

1. א. $y = -\frac{3}{4}x, y = 0$

ב. $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$ (1)

(-1.6, 1.2), (2, 0) (2)

ג. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ כן.

2. א. $A(0, 0, 1), C(6, 0, -7)$

ב. $B(3, 5, -3)$

ג. $4x + 3z - 3 = 0$

ד. 18.43°

3. א. $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \frac{z_1}{z_2} = \text{cis}(-\pi) = -1$ (1)

(2) $z_1 \cdot z_2 = i$

ב. $2\text{cis}\frac{1}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{5}{6}\pi, 2\text{cis}\frac{3}{2}\pi$

ג. (1) $(0, 2), (-\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, -1)$ כן.

(2) $n = 9$

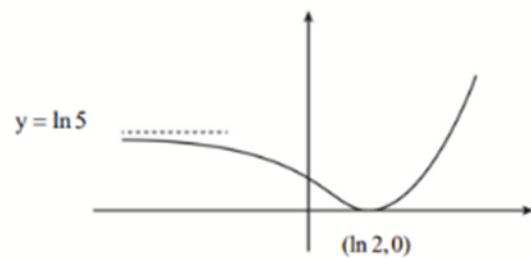
4. א. (1) כל x.

(2) התוכן גדול מ-1 לכל x.

(3) $y = \ln(b^2 + 1)$

(4) $b > 0, \min(\ln b, 0)$

(5)



ב. $b = 2, b = -2$

ג. עבור $b = -2$ אין נקודות קיצון והפונקציה $f(x)$ עולה.

5. א. הוכחה.

ב. $f'''(x) = e^x(x-2)$

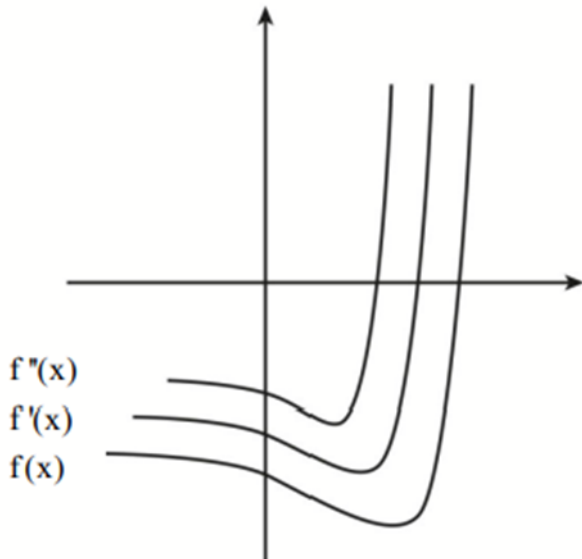
ג. (1) $(0, n-5), (5-n, 0)$

(2) $y = 0$

(3) $\min(4-n, -e^{4-n})$

(4) הוכחה.

(5)



ד. $F(x) = e^x(x-6) + 6$

עבחן עס' 10

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. הישר $4x - 3y = 0$ משיק למעגל שמרכזו $(5a, 0)$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את משוואת המעגל באמצעות a .

מנקודה G , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר, המשיק למעגל בנקודה K .

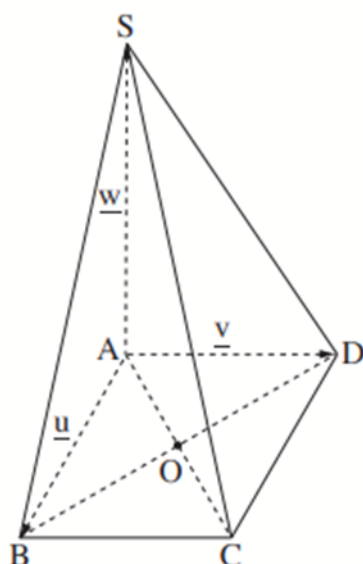
ב. הבע באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות G שבעבורן המרחק GK שווה למרחק שלהן

מן הישר $x = -3a$ וצייר סקיצה שלו.

נתון: אורך הקטע GK הקצר ביותר האפשרי הוא 7.5.

ג. (1) מה הם שיעורי הנקודה G שבעבורה אורך הקטע GK הוא 7.5? נמק.

(2) מצא את ערכו של הפרמטר a . נמק.



2. נתונה פירמידה $SABCD$, שבסיסה, $ABCD$, הוא ריבוע (ראה ציור).

הנקודה O היא נקודת חיתוך אלכסוני הבסיס.

הנקודה P היא נקודה על הקטע SD , והיא מקיימת $\vec{SP} = t \cdot \vec{SD}$, $t > 0$.

נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

א. הבע את הווקטור \vec{OP} באמצעות \underline{w} , \underline{v} , \underline{u} ו- t .

ב. מצא בעבור איזה ערך של t , OP מקביל למישור הפאה SAB .

נתון: אורך צלע הריבוע $ABCD$ הוא 4.

AS מאונך לבסיס הפירמידה, $AS = 4\sqrt{2}$.

הנקודה A היא ראשית הצירים. הנקודות B , D ו- S נמצאות

על החלק החיובי של הצירים x , y ו- z בהתאמה.

ג. מצא בעבור אילו ערכים של t , הישר OP יוצר זווית של 45° עם מישור הפאה SAD .

הנקודה T נמצאת על הקטע SC כך ש- $TABCD$ היא פירמידה ישרה.

ד. מצא את נפח הפירמידה $TABCD$.

3. z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את המשוואה $z^5 = 2^5$.

הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n במישור גאוס מתאימות לפתרונות המשוואה $z^n = 2^n$ ($n \geq 3$ הוא מספר טבעי).
חיברו את הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n ויצרו מצולע משוכלל קמור.
נתון כי שטח המצולע שהתקבל שווה ל- n .
ב. מצא את n .

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב.

ג. באילו רביעים נמצאים פתרונות w כאלה?
הוא פתרון של המשוואה $z^n = 2^n$ כך ש- $a \cdot b > 0$ [כלומר: $\text{Re}(w) \cdot \text{Im}(w) > 0$].

ארבע הנקודות הנמצאות ברביעים שמצאת בסעיף ג הן קודקודיו של מלבן.

אם מכפילים כל אחד מן המספרים המתאימים לארבע הנקודות הללו

במספר $z_0 = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$), מתקבל מלבן חדש, שצלעותיו מקבילות לצירים.
ד. מצא את הזווית θ . נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - ae^x + 3}$. a הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת בעבור $x = 0$.

א. (1) מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

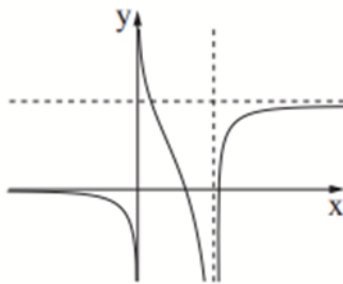
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

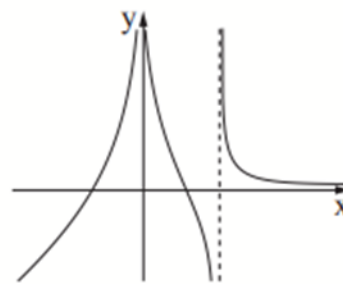
ג. אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$. איזה מהם מתאר אותה? נמק.

ד. נתונה הפונקציה $h(x) = f(x + k)$.

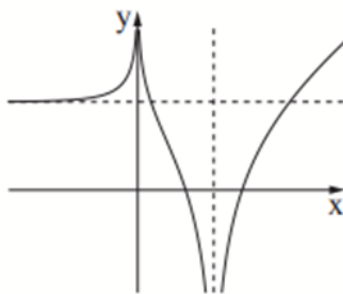
עבור איזה ערך של $k \neq 0$ יש לפונקציה $h(x)$ אסימפטוטה שמשוואתה היא $x = 0$? נמק.



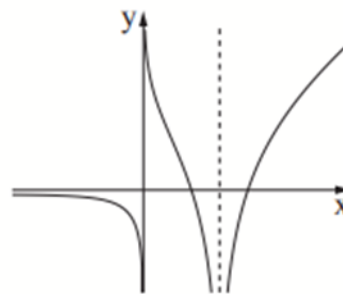
II



I



IV



III

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x^2 + ax + 1)$.

a הוא פרמטר, $-2 < a < 2$.

א. הראה שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ד. בסוף השאלה מוצגים שלושה גרפים (I-III) המתארים את גרף הפונקציה $f(x)$ כתלות בפרמטר a .

כל אחד מן הגרפים מתאים לאחד מן התחומים (1)-(3) של a :

$$(1) \quad 0 < a < 2$$

$$(2) \quad -2 < a < 0$$

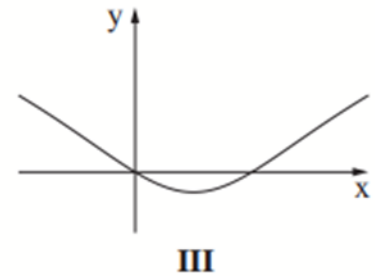
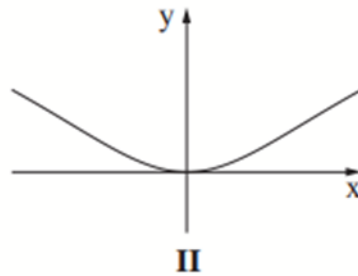
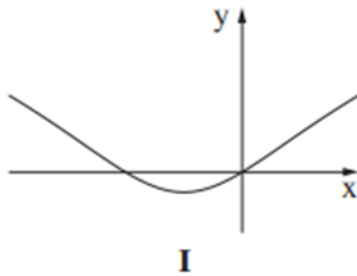
$$(3) \quad a = 0$$

כתוב איזה מתחומי הערכים (1)-(3) מתאים לכל אחד מן הגרפים.

ענה על סעיף ה בעבור a המקיים $-2 < a < 0$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

ה. הבע באמצעות a את האינטגרל: $\int_0^{-a} \ln(4x^2 + 4ax + 4) dx$.



בהצלחה!

משוואות סופיות

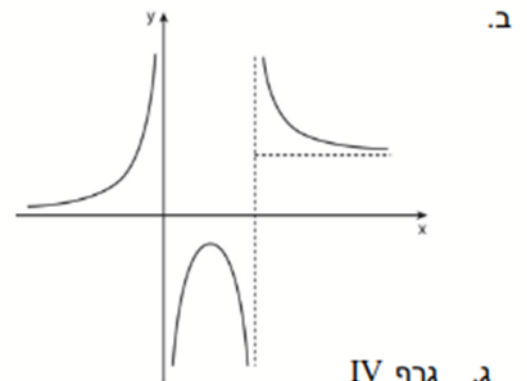
5. א. הוכחה.
 ב. $(-a, 0), (0, 0)$
 ג. $\min(-\frac{a}{2}, \ln(1 - \frac{a^2}{4}))$
 ד. I (1)
 III (2)
 II (3)
 ה. $-a \ln 4 - S$

1. א. $(x-5a)^2 + y^2 = 16a^2$
 ב. $y^2 = 16ax$
 ג. $G(0,0)$ (1)
 (2) $a = 2.5$

2. א. $\overline{OP} = -\frac{1}{2}\underline{u} + (t - \frac{1}{2})\underline{v} + (1-t)\underline{w}$
 ב. $t = \frac{1}{2}$
 ג. $t = 1, t = \frac{2}{3}$
 ד. $V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$

3. א. $z = 2, 2\text{cis}72^\circ, 2\text{cis}144^\circ, 2\text{cis}216^\circ$
 $z = 2\text{cis}288^\circ$
 ב. $n = 12$
 ג. רביעים I, III
 ד. $\theta = 45^\circ$

4. א. (1) $a = 4$, תחום הגדרה: $x \neq 0, x \neq \ln 3$
 (2) $y = 0, y = 2, x = \ln 3, x = 0$
 (3) תחומי עלייה: $x < 0, 0 < x < \ln 1.5$
 תחומי ירידה: $\ln 1.5 < x < \ln 3, \ln 3 < x$



- ג. גרף IV
 ד. $k = \ln 3$

עבחן עס' 11

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. אורך הקטע AB הוא 4.

נתון: הנקודה A נמצאת על ציר ה-y, והנקודה B נמצאת על ציר ה-x (ראה ציור).

הנקודה M היא אמצע הקטע AB.

א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי

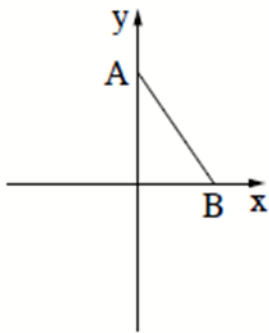
של כל הנקודות M שנבנו כך, וזכה את המקום הגאומטרי הזה.

נתון: הנקודה L נמצאת על הקטע AB כך ש- $\frac{AL}{LB} = t$. $t > 0$ הוא פרמטר.

ב. הבע באמצעות t את המשוואה של המקום הגאומטרי של כל הנקודות L שנבנו כך, וזכה את המקום הגאומטרי הזה.

ג. בעבור איזה ערך של t המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף ב מתלכד עם המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א? נמק.

ד. האם קיים $t > 0$ שבעבורו המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף ב חותך את ציר ה-x בנקודה (5, 0)? נמק.



2. נתונה פירמידה OBCDE שבסיסה OBCD הוא ריבוע.

המקצוע OE מאונך למישור הבסיס.

נתון: $OE = 12$, $OD = 4$.

מיקמו את הפירמידה במערכת צירים כך שהנקודה O היא ראשית הצירים

והנקודות E, B, D נמצאות על הצירים x, y, z בהתאמה (כמתואר בציור).

א. מצא את ההצגה הפרמטרית של הישר EC.

הנקודה N נמצאת על המקצוע EC. מן הנקודה N מורידים אנך

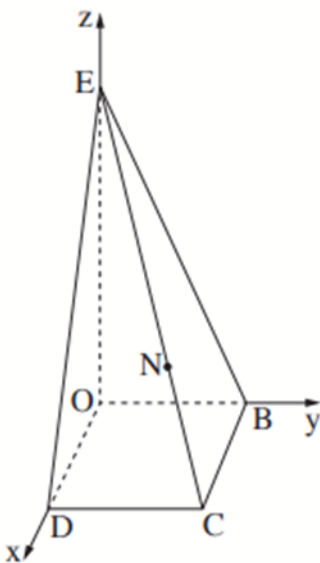
לבסיס הפירמידה החותך אותו בנקודה F. מרחק הנקודה F מציר ה-y הוא 3.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N.

ג. מצא את גודל הזווית שבין המישור BCN ובין בסיס הפירמידה OBCD.

הנקודה K היא נקודה על המקצוע EC כך ש- $KOBCD$ היא פירמידה ישרה (בסיס הפירמידה).

ד. מצא את ההצגה הפרמטרית של הישר שעליו מונח הגובה לבסיס מן הנקודה K.



3. א. (1) הוכח כי לכל מספר מרוכב z מתקיים $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

(2) הוכח כי אם המספר המרוכב z נמצא על מעגל היחידה, אז גם המספר $\frac{1}{z}$ נמצא על מעגל היחידה.

ב. (1) הראה כי בעבור כל מספר מרוכב z הנמצא על מעגל היחידה, הסכום $z + \frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.

(2) z_1 ו- z_2 הם מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה.

נתון כי הרכיבים המדומים של z_1 ו- z_2 הם חיוביים.

הוכח כי אם: $z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2$ אז z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$, המוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה- x .

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) הוכח כי $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

(2) הסבר מדוע גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מתחת לישר $y = x$.

5. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = \frac{e^{-mx}}{1+x^2}$. m הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור $m \geq 0$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציות $f(x)$?

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

(3) נתון כי כל הפונקציות $f(x)$ מן המשפחה חותכות זו את זו בנקודה אחת. מצא את שיעוריה.

ב. (1) בעבור $m \geq 0$, מצא את הערכים של m שבעבורם הנגזרת $f'(x)$:

(i) אינה מתאפסת בשום נקודה.

(ii) מתאפסת בנקודה אחת בדיוק.

(iii) מתאפסת בשתי נקודות בדיוק.

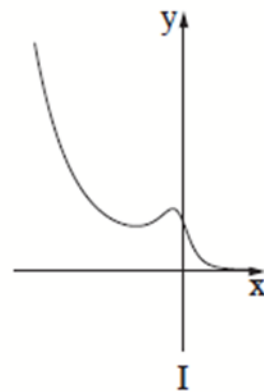
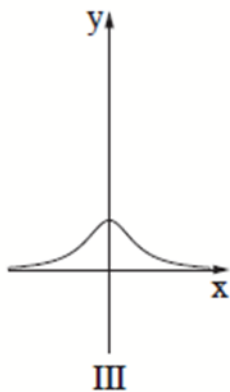
(2) בסוף השאלה נתונים שלושה גרפים (III-I) של פונקציות מן המשפחה $f(x)$ בעבור $m \geq 0$.

ידוע כי $m \neq 1$ וכי כל אחד מן הגרפים מתאים לערך או לטווח ערכים אחר של m .

התאם לכל גרף מבין השלושה את הערך או את טווח הערכים של m המתאים לו. נמק.

ענה על סעיף ג. תוכל להיעזר בגרף המתאים מבין הגרפים III-I .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(-x)$ בעבור $0 < m < 1$.



בהצלחה!

משוואות סופיות

1. א. $x^2 + y^2 = 4$, מעגל קטני ורדיוסו 2.

ב. $\frac{(t+1)^2 x^2}{t^2} + (t+1)^2 y^2 = 16$

או $\frac{x^2}{(\frac{4t}{t+1})^2} + \frac{y^2}{(\frac{4}{t+1})^2} = 1$, אליפסה.

ג. $t = 1$
ד. לא.

2. א. $EC: \underline{x} = (0, 0, 12) + t(1, 1, -3)$

ב. $N(3, 3, 3)$

ג. 71.565°

ד. $\underline{x} = (2, 2, 0) + s(0, 0, 1)$

3. א. (1) הוכחה.

(2) הוכחה.

ב. עבור $z = r \operatorname{cis} \theta$

(1) $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$

(2) הוכחה.

4. א. (1) אין חיתוך עם ציר x .

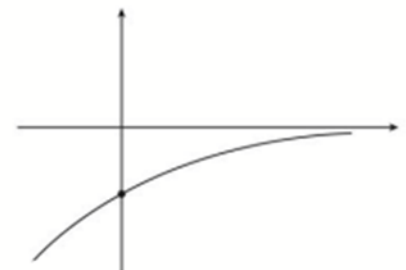
(2) חיתוך עם ציר y : $(0, -\ln 2)$.

(3) $f(x)$ שלילית לכל x , חיובית לאף x .

(4) $y = 0$

(5) $f(x)$ עולה לכל x , יורדת לאף x .

ב.



ג. (1) הוכחה.

(2) הוכחה.

5. א. (1) כל x .

(2) $f(x)$ חיובית לכל x , שלילית עבור אף x .

(3) $(0, 1)$.

ב. (1) (i) $m > 1$.

(ii) $m = 0$ $m = 1$.

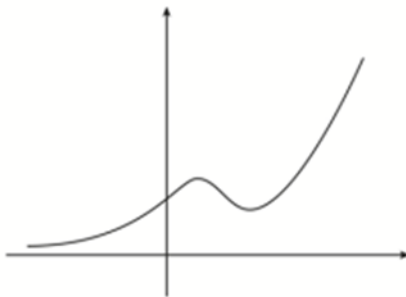
(iii) $0 < m < 1$.

(2) גרף I: $0 < m < 1$

גרף II: $m > 1$

גרף III: $m = 0$

ג.



עבחן עס' 12

השאלות

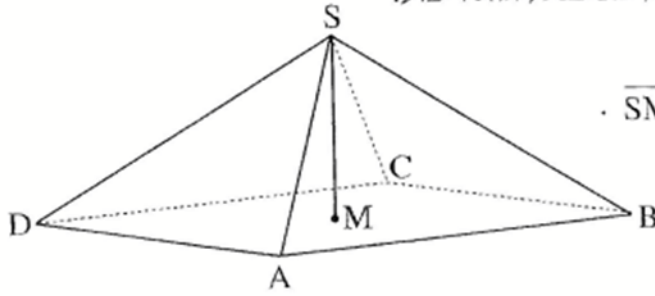
שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון מעגל שמשוואתו היא: $x^2 + y^2 = a^2$. הוא פרמטר חיובי. הזיזו את המעגל ימינה (הזזה אופקית) כך ששיק לציר ה- y .
- א. הבע באמצעות a את משוואת המעגל שהתקבל.
- ב. בונים מעגל המשיק מבחוץ למעגל שהתקבל בסעיף א ומשיק גם לציר ה- y . שיעור ה- x של מרכז המעגל שבונים הוא חיובי.
- מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאים מרכזי המעגלים הנבנים כך (אם יש צורך, השתמש ב- a).
- הישר $y = x + 3$ משיק בנקודה M למקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף ב.
- ג. מצא את a .
- ד. רשום את שיעורי נקודת ההשקה של שני המעגלים האלה:
- I. המעגל שהתקבל בסעיף א.
- II. המעגל שנבנה כמתואר בסעיף ב ומרכזו הוא בנקודה M .

2. נתונה פירמידה ישרה $SABCD$, שבסיסה, $ABCD$, הוא ריבוע.



$\vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC}$ - היא נקודה כך ש-

א. (1) הוכח: $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

(2) הוכח ש- \vec{SM} מאונך ל- \vec{AC} .

(3) נמק מדוע SM הוא גובה בפירמידה.

נתון: $A(\sqrt{3}, 1, 0)$, $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$, הנקודות B ו- D נמצאות במישור $z = 0$

ונפח הפירמידה $SABCD$ הוא 16.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודה M .

(2) מצא את שיעורי הקדקוד S (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הנקודות שמצאת בתת-סעיף ב(2) ב- S_1 ו- S_2 .

ג. (1) מצא את משוואת המישור AS_1S_2 .

(2) האם נקודה C נמצאת על המישור AS_1S_2 ? נמק.

3. א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^3 = \bar{z}$, $z \neq 0$. z הוא מספר מרוכב.

ב. (1) מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות $z^2 \cdot (\bar{z})^2 = 1$.

(2) הראה כי כל הפתרונות של המשוואה בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי שמצאת בתת-סעיף ב(1).

ג. (1) את הנקודות שמתאימות לפתרונות המשוואה שמצאת בסעיף א מסובבים בזווית 45° (נגד כיוון השעון). נתון שכל אחת מן הנקודות המתקבלות לאחר הסיבוב מתאימה למספר המקיים

$$z^4 = a$$

מצא את a .

(2) את הנקודות שמתאימות לפתרונות המשוואה שמצאת בסעיף א מסובבים בזווית α (נגד

כיוון השעון).

הוכח שסכום המספרים המתאימים לנקודות המתקבלות לאחר הסיבוב שווה ל- 0.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{ax} - e^x}{e^{ax} - 3e^x + 2}$, a הוא פרמטר.

לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית $x = \ln 2$.

א. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב-ה.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ והראה כי עבור כל $x \neq 0$ בתחום מתקיים: $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$.

ג. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

מגדירים פונקציה $h(x) = \left| \frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{1}{2} \right|$.

ד. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

(3) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \ln 8$

והישר $x = \ln 16$.

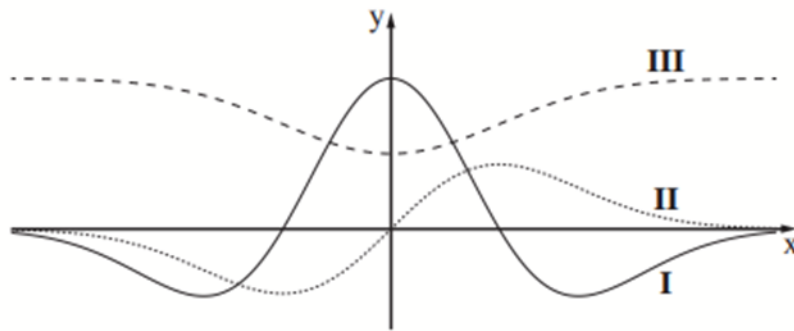
נתון: הפונקציה $h(x)$ סימטרית ביחס לישר $x = \ln 2$.

הנקודות A ו- B נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$, והן סימטריות ביחס לישר $x = \ln 2$.

שיעור ה- x של הנקודה A הוא $\ln 8$.

ה. מצא את שיעורי הנקודה B .

5. לפניך סרטוט המתאר את הגרפים של הפונקציות f , f' , f'' , המוגדרות לכל x .
 הגרף III נמצא כולו מעל הגרף II.



- א. התאם כל אחד מן הגרפים I, II, III לפונקציות f , f' , f'' .
 נמק את קביעתך.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f'(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

נתון כי $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

- ב. מצא בעבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מינימלי, ובעבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.

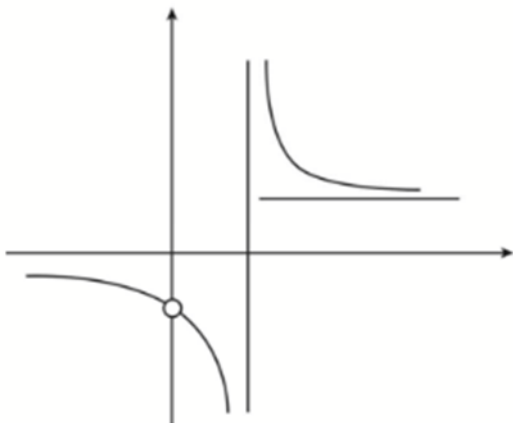
נתון כי האורך המקסימלי של הקטע AB שווה ל- $1 + \frac{1}{2e}$.

- ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

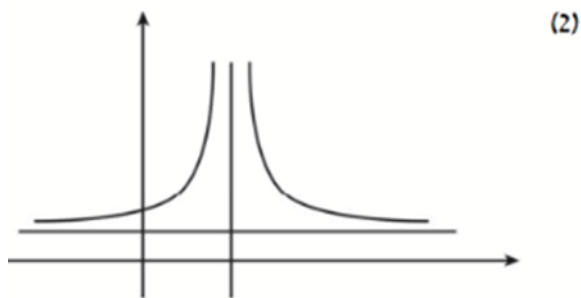
בהצלחה!

משוואות סופיות

4. א. $a = 2$
 ב. $x \neq \ln 2, x \neq 0$
 ג. $y = 0, y = 1, x = \ln 2$ (1)
 (2) ירידה: $x < 0, 0 < x < \ln 2, \ln 2 < x$
 עלייה: אין
 (3)



ד. (1) $x = \ln 2, y = \frac{1}{2}$



(3) 0.500724

ה. $B\left(-\ln 2, \frac{5}{6}\right)$

5. א. $f : \text{III}$
 ב. $f' : \text{II}$
 ג. $f'' : \text{I}$
 ב. $x = -1$ אורך מקסימלי.
 ג. $x = \frac{1}{2}$ אורך מינימלי.
 ג. $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + 1$

1. א. $(x-a)^2 + y^2 = a^2$
 ב. $x \neq 0, y^2 = 4ax$
 ג. $a = 3$
 ד. $(3, 3)$

2. א. (1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) כשמחברים את הקדקוד הפירמידה

הישרה עם מרכז המעגל החוסם

את הבסיס מקבלים גובה הפירמידה.

ב. (1) $M(0, 0, 0)$ (2) $S(0; 0; 6)$ או $S(0; 0; -6)$.

ג. (1) $x - \sqrt{3}y = 0$ (2) C נמצאת על המישור.

3. א. $1, i, -1, -i$

ב. (1) $x^2 + y^2 = 1$

(2) הוכחה

ג. (1) $a = -1$

(2) הוכחה

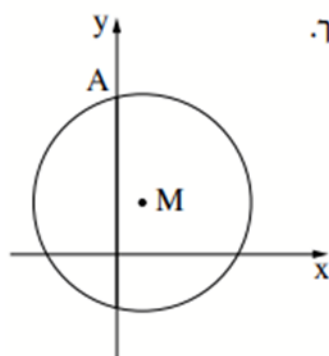
עבחן עס' 13

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים



1. מעגל שמרכזו M חותך את החלק החיובי של ציר ה-y בנקודה A, כמתואר בציור שלפניך.

ממרכז המעגל העבירו אנך לציר ה-y, החותך את הציר בנקודה E.

נתון כי $AE = 6$.

נתון גם כי מרחק הנקודה M מראשית הצירים הוא מחצית מן האורך

של רדיוס המעגל.

א. הוכח כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M המקיימות את נתוני השאלה

נמצא על אליפסה, ומצא את משוואתה.

נסמן ב- F_1 וב- F_2 את מוקדי האליפסה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

הנקודות D_1 ו- D_2 הן נקודות על האליפסה.

שיעור ה-y של D_1 חיובי ושיעור ה-y של D_2 שלילי.

ב. (1) מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי עבור המרובע $F_1 D_1 F_2 D_2$. נמק.

(2) האם קיים מרובע $F_1 D_1 F_2 D_2$ בעל היקף גדול ביותר? נמק.

2. נתונות הנקודות $A(-3, 1, 2)$, $B(-7, 4, 1)$, $C(15, -20, -3)$. דרך הנקודות

A ו-B מעבירים ישר ℓ_1 ודרך הנקודה C מעבירים ישר ℓ_2 כך ש- ℓ_2 מאונך ל- ℓ_1 .

ℓ_1 ו- ℓ_2 נחתכים בנקודה D.

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר ℓ_2 .

ב. בונים תיבה שבסיסה ריבוע כאשר אחת מצלעות הריבוע היא AD ו-DC הוא

מקצוע צדדי.

מצא את:

(1) נפח התיבה.

(2) משוואות המישורים המכילים את שני הבסיסים של התיבה (הריבועים).

3. z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים המקיימים: $|z_1| = |z_2| = r$, $\arg z_1 + \arg z_2 = 90^\circ$.

א. הוכח כי תוצאת המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא מספר מדומה טהור, והבע אותו באמצעות r .

הנקודות A, B, C במישור גאוס מייצגות בהתאמה את המספרים המרוכבים z_1, z_2, z_3 .

נתון: הנקודות A, B, C אינן נמצאות על ישר אחד, והנקודה C נמצאת על הישר $y = x$.

ב. הסבר מדוע המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

הנקודה D במישור גאוס מתאימה למספר המרוכב $z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)^2$.

$$\text{נתון: } z_1 + z_2 = 7 + 7i$$

$$z_1 - z_2 = 1 - i$$

$$(z_3)^2 = 2i$$

ג. (1) מצא את שיעורי הנקודות C ו- D (מצא את שתי האפשרויות).

(2) חשב את שטח המרובע $BDAC$ עבור הנקודה C הנמצאת ברביע הראשון.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = e^{2mx} - e^{mx}$. $m > 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע באמצעות m .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת גרפים של הפונקציות $f(x)$ עבור $m = 1$ ועבור $m = 2$ (ידוע ששני הגרפים

חותכים זה את זה בשתי נקודות בדיוק). התאם בין הגרפים שסרטטת ובין ערכי m הנתונים.

הישר $y = k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) הבע באמצעות m את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $y = k$.

עבור כל m , נסמן את השטח המתואר בתת-סעיף ג(1) ב- S_m (S_1 הוא השטח עבור $m = 1$).

(2) הראה שלכל m מתקיים: $S_m = \frac{S_1}{m}$.

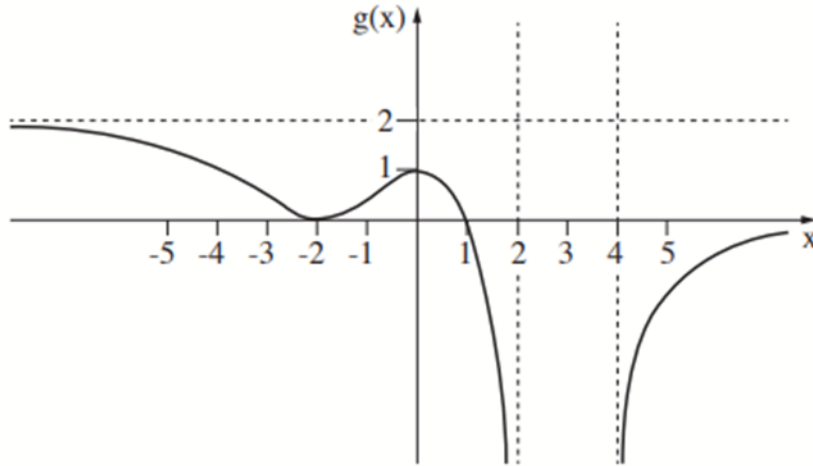
5. נתון: $f(x)$ היא פונקציה רציפה וגזירה לכל x . נסמן $g(x) = \ln(f(x))$.

הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל $x > 4$ ולכל $x < 2$, ורק שם.

בתחום $2 \leq x \leq 4$, $f'(x) = 0$ רק עבור $x = 3$.

בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.

הפונקציה $g(x)$ מתאפסת רק בנקודות שבהן $x = 1$ ו- $x = -2$.



א. מצא את $f(-2)$, $f(0)$ ו- $f(1)$.

ב. מה הם תחומי החיוביות ותחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$? נמק.

ג. מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם כל אחד מן הצירים? נמק.

ד. לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות אופקיות. כתוב את משוואותיהן.

ה. מה הם תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$? נמק.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ז. הסבר מדוע: $\int_{-2}^1 f(x) dx > 3$.

בהצלחה!

תשובות סופיות

5. א. $f(1)=1, f(0)=e, f(-2)=1$

ב. תחום חיוביות: $x < 2, x > 4$

תחום שליליות: $2 < x < 4$

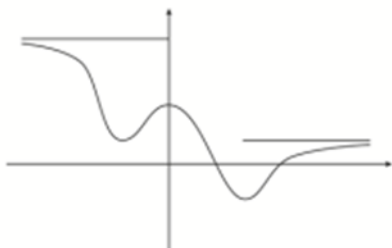
ג. $(4,0) (2,0) (0,e)$

ד. $y=1, y=e^2$

ה. תחום ירידה: $x < -2, 0 < x < 3$

תחום עליה: $x > 3, -2 < x < 0$

ו.



1. א. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$

ב. $S_{F_1 D_1 F_2 D_2} = 6\sqrt{3}$ (1)

השטח המקסימאלי מתקבל עבור

המשולשים בעלי הגובה המקסימאלי.

(2) לא. למרובע יש היקף קבוע של $8\sqrt{3}$

2. א. $\underline{x} = (15, -20, -3) + t(1, 3, 5)$

ב. $650\sqrt{140}$ (1)

(2) $x + 3y + 5z + 60 = 0$

$x + 3y + 5z - 10 = 0$

3. א. $z_1 \cdot z_2 = r^2 i$

ב. על פי חישוב (המרחק AC שווה למרחק BC).

ג. (1) $D(-625, -625), C(1, 1)$ או

$D(625, 625), C(-1, -1)$

(2) $S_{BDAC} = 626$

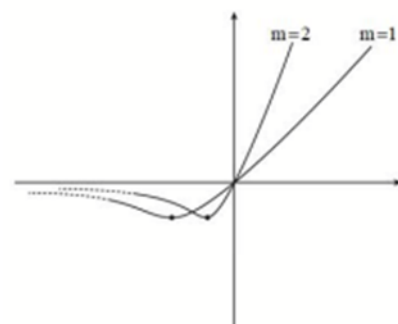
4. א. (1) כל x

(2) $(0, 0)$

(3) $y = 0$

(4) $(\frac{\ln 0.5}{m}, -\frac{1}{4})$

ב.



ג. (1) $S_m = \frac{\ln 2}{4m} - \frac{1}{8m}$

(2) הוכחה.

עבחן עס' 14

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונות הנקודות $A(-3a, 0)$ ו- $B(3, 0)$. $a > 0$ הוא פרמטר.

א. הבע באמצעות a את המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המקיימות $\frac{PA}{PB} = 1$.

ב. הראה שהמקום הגאומטרי של כל הנקודות Q המקיימות $\frac{QA}{QB} = 2$ הוא מעגל, והבע באמצעות a את שיעורי מרכז המעגל הזה ואת הרדיוס שלו.

ג. נתבונן באוסף כל המעגלים אשר משיקים למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א ועוברים דרך מרכז המעגל שמצאת בסעיף ב.

נתון כי מרכזי המעגלים האלה מהווים מקום גאומטרי העובר דרך ראשית הצירים.

(1) זהה את המקום הגאומטרי הזה.

(2) מצא את a , וכתוב את משוואתו של המקום הגאומטרי הזה.

2. בציור שלפניך נתונה התיבה $ABCD A' B' C' D'$. המקצועות DA , DC ו- DD' מונחים על הצירים x , y ו- z בהתאמה, כמתואר בציור.

נתון: $AA' = 3$, $DA = 4$.

נסמן: $AB = a$. $a > 0$ הוא פרמטר.

הנקודות P , N , L ו- K נמצאות על

מקצועות התיבה AA' , DC , BC ו- $A'B'$ בהתאמה,

כך שמתקיים: $AP = 2PA'$,

$N(0, 5, 0)$

L היא אמצע המקצוע BC ,

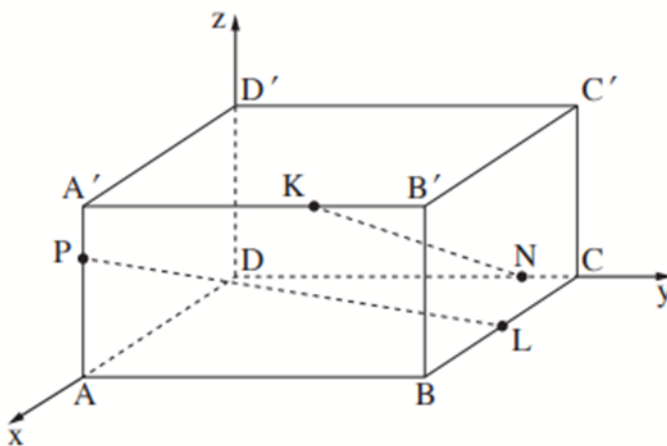
$$\vec{A'K} = \frac{4}{5}\vec{DN}$$

א. מצא את משוואת המישור PNK .

ב. מצא הצגה פרמטרית של הישר NK ושל הישר PL . אם צריך, הבע באמצעות a .

ג. (1) עבור איזה ערך של a $\angle PC'C = 82.1^\circ$? בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(2) האם קיים a שעבורו $\angle PC'C = 90^\circ$? נמק.



3. z_A, z_B, z_C הם שלושה מספרים מרוכבים שונים זה מזה המייצגים

את הנקודות A, B, C במישור גאוס, בהתאמה.

$$\text{נתון: } |z_A| = |z_B| = |z_C| = \sqrt{65}$$

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון,

$$z_A \bar{z}_C = (8+i)z = (8-i)\bar{z}$$

א. (1) מצא את z_A ואת z_C .

(2) הסבר מדוע $\angle ABC = 90^\circ$.

נתון: $AB = BC$.

ב. מצא את z_B (מצא את שתי האפשרויות).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

נסמן: $g(x) = e^x - x$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, והסבר מדוע לכל x מתקיים: $e^x - x \geq 1$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$? נמק.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

$$(4) \text{ הראה כי } f'(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

ידוע כי הביטוי $2e^x - xe^x - 1$ מוגדר לכל x וחיובי בתחום $-1 \leq x \leq 1$.

ג. (1) חשב את $f(-1)$ ואת $f(1)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-1 \leq x \leq 1$.

(2) הסתמך על הסעיפים הקודמים והסבר מדוע לפונקציה $f(x)$ יש לפחות שתי נקודות קיצון בתחום ההגדרה שלה כולו.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x , על ידי הישר $x = -1$ ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$

בתחום $-1 \leq x \leq 0$.

5. $f(x)$ היא פונקציה גזירה לכל x בתחום ההגדרה שלה.

א. הראה שלפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $e^{f(x)}$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x , ונקודות הקיצון האלה הן מאותו סוג (מינימום או מקסימום).

נתון כי $f(x) = x \ln(x^n)$. n הוא פרמטר טבעי.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. התייחס לערכים שונים של n .

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x . התייחס לערכים שונים של n .

נתון: גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

ד. (1) הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם צריך – הבע באמצעות n).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $n = 2$.

ה. היעזר בתשובתך על סעיף א, מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $e^{x \ln(x^n)}$ (n טבעי), וקבע את סוגן (אם צריך – הבע באמצעות n).

בהצלחה!

משאלות סופיות

(2) $f'(0)=1, f'(-5)=-0.038$ כיוון ש $f'(x)$ רציפה,

קיימת בין $x=0$ ל- $x=-5$ לפחות נקודה

אחת שבה $f'(x)=0$ והיא נקודת מינימום של הפונקציה.

$f'(0)=1, f'(5)=-0.021$ כיוון ש $f'(x)$ רציפה,

קיימת בין $x=0$ ל- $x=5$ לפחות נקודה

אחת שבה $f'(x)=0$ והיא נקודת מקסימום של הפונקציה.

ד. $S = \ln(1 + \frac{1}{e})$

5. א. הוכחה

ב. עבור n אי-זוגי: $x > 0$. עבור n זוגי: $x \neq 0$.

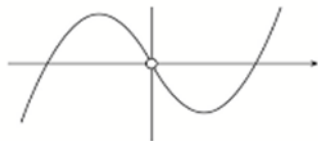
ג. עבור n אי-זוגי: $(1, 0)$.

עבור n זוגי: $(-1, 0), (1, 0)$.

ד. (1) הוכחה

(2) $\max\left(-\frac{1}{e}, \frac{n}{e}\right), \min\left(\frac{1}{e}, -\frac{n}{e}\right)$

(3)



ה. $\max\left(-\frac{1}{e}, e^{\frac{n}{c}}\right), \min\left(\frac{1}{e}, e^{-\frac{n}{c}}\right)$

1. א. $x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a$

ב. $M(4+a, 0) \leftarrow (x - (4+a))^2 + y^2 = (2a+2)^2$

$R = 2a + 2$

ג. (1) פרבולה קנונית.

(2) $y^2 = 60x, a = 11$

2. א. $13x + 4y - 16z - 20 = 0$

ב. $\underline{x} = (0, 5, 0) + t(4, -1, 3), \underline{x} = (4, 0, 2) + r(2, -a, 2)$

ג. (1) $a \approx 5.99$

(2) לא.

3. א. (1) $z_C = -8 - i = \sqrt{65} \text{cis} 187.125^\circ, z_A = 8 + i = \sqrt{65} \text{cis} 7.125^\circ$

(2) מתקבל מעגל קנוני שבו AC קוטר ו-B

נמצאת על היקף המעגל, כך ש $\angle CAB$ הינה זווית

היקפית הנשענת על הקוטר.

ב. $z_B = 1 - 8i = \sqrt{65} \text{cis} -82.875^\circ$ או $z_B = -1 + 8i = \sqrt{65} \text{cis} 97.125^\circ$

4. א. (1) כל x

(2) $\min(0, 1)$

לפונקציה יש נקודת מינימום מוחלט

בנקודה $(0, 1)$, לכן $g(x) \geq 1$ לכל x ,

כלומר $e^x - x \geq 1$ לכל x .

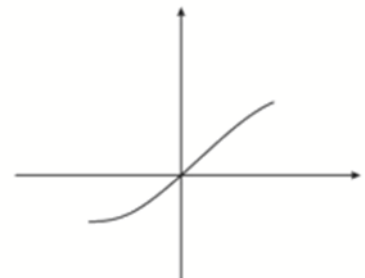
ב. (1) כל x .

(2) $x < 0 : y = 0, x > 0 : y = 1$

(3) $(0, 0)$

(4) הוכחה.

ג. (1) $f(1) = 1, f(-1) = \frac{1-e}{1+e} = -0.46$



עבחן מס' 15

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונה הפרבולה הקנונית $y^2 = 2px$. $p > 0$ הוא פרמטר. הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ נמצאות על הפרבולה.

נתון: שיפוע הישר AB הוא $\frac{4}{3}$,

שיעור ה- y של אמצע הקטע AB הוא 9.

א. מצא את משוואת הפרבולה.

נתון: המשיקים לפרבולה דרך הנקודות A ו- B מאונכים זה לזה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B (הנקודה A נמצאת ברביע הראשון).

ג. מצא עוד זוג נקודות על הפרבולה שהמשיקים דרכן לפרבולה מאונכים זה לזה.

2. נתונה פירמידה ישרה $SABCD$, שבסיסה, $ABCD$, הוא ריבוע.

M היא נקודה כך ש- $\vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC}$.

א. (1) הוכח: $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.

(2) הוכח: ש- \vec{SM} מאונך ל- \vec{AC} .

(3) נמק מדוע SM

הוא גובה הפירמידה.

נתון: $A(\sqrt{3}; 1; 0)$, $C(-\sqrt{3}; -1; 0)$,

הנקודות B ו- D נמצאות במישור $z = 0$

ונפח הפירמידה $SABCD$ הוא 16.

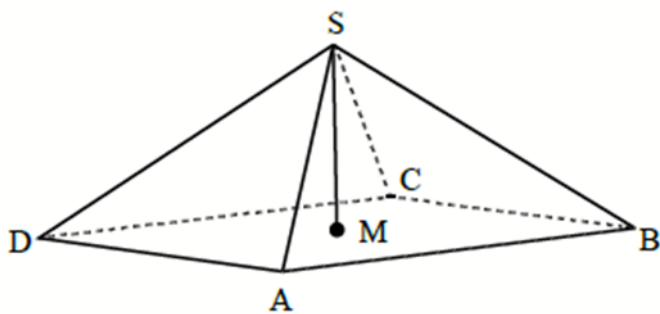
ב. (1) מצא את שיעורי הנקודה M .

(2) מצא את שיעורי הקדקוד S (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הנקודות שמצאת בתת-סעיף ב(2) ב- S_1 ו- S_2 .

ג. (1) מצא את משוואת המישור AS_1S_2 .

(2) האם נקודה C נמצאת על המישור AS_1S_2 ? נמק.



3. במעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור גאוס חסום משולש שווה צלעות ABC .
 הקדקוד A מתאים למספר המרוכב $z_1 = a - \sqrt{3} \cdot a \cdot i$ ($a > 0$ הוא פרמטר ממשי).
 נתון: הקדקוד B נמצא ברביע הראשון.

א. הבע באמצעות a את המספרים המרוכבים z_2 ו- z_3 המתאימים לקדקודים B ו- C בהתאמה.

נתון: $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$.

ב. מצא את a .

ג. המספר z_1^{6n+5} מתאים לנקודה P במישור גאוס. n הוא מספר שלם.

הנקודה O היא ראשית הצירים. הראה שהנקודה B נמצאת על הקו OP .

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (3) מצא את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. הסבר מדוע עבור כל מספר ממשי a מתקיים: $\int_a^{a+1} f(x) dx < 1$. תוכל להיעזר בסרטוט.

ג. (1) $f(x) = g(x) + \frac{1}{2}$ היא פונקציה המקיימת:

הוכח שהפונקציה $g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

- (2) הסבר מדוע לכל שני מספרים b ו- c המקיימים $0 < b < c$ מתקיים:

$$\int_{-c}^{-b} f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = c - b$$

בתשובתך תוכל להיעזר בסרטוט מתאים ובשיקולי סימטריה.

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln(e^{2x} + b)$. $b > 0$ הוא פרמטר.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(e^x + be^{-x})$.

- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

- ג. (1) הוכח: $f(x) - g(x) = x$.

- (2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ (אם צריך, הבע באמצעות b).

נתון כי נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ נמצאת על האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

- ד. מצא את ערך הפרמטר b .

- ה. הצב $b = 4$ וסרטט במערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

בהצלחה!

משוואות סופיות

1. א. $y^2 = 24x$

ב. $A(24,24)$, $B(1.5,-6)$

ג. יש אינסוף זוגות נקודות כאלו,

שמכפלת שיעורי ה- y שלהם היא -144 ,

למשל: $(24,-24)$, $(1.5,6)$ או $(6,12)$, $(6,-12)$.

2. א. (3) כשמחברים את הקדקוד

הפירמידה הישרה עם מרכז המעגל

החוסם את הבסיס מקבלים

גובה הפירמידה.

ב. (1) $M(0,0,0)$ (2) $S(0;0;6)$

או $S(0;0;-6)$

ג. (1) $x - \sqrt{3}y = 0$

(2) C נמצאת על המישור.

3. א. $z_1 = a - \sqrt{3} \cdot a i = 2a \text{ cis } 300^\circ$

$z_2 = a + \sqrt{3} \cdot a i = 2a \text{ cis } 60^\circ$

$z_3 = -2a = 2a \text{ cis } 180^\circ$

ב. $a = 1$

ג. הוכחה.

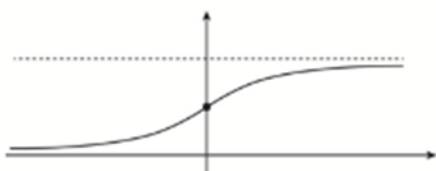
4. א. (1) כל x .

(2) עלייה: כל x , ירידה: אין.

(3) $(0, \frac{1}{2})$

(4) $y = 0$, $y = 1$

(5)



ב. הסבר.

ג. (1) הוכחה.

(2) הסבר.

5. א. (1) כל x .

(2) עולה בכל תחום הגדרתה.

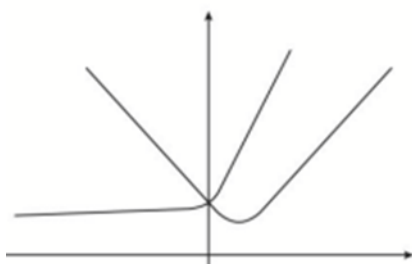
ב. כל x .

ג. (1) הוכחה.

(2) $(0, \ln(1+b))$

ד. $b = 4$

ה.



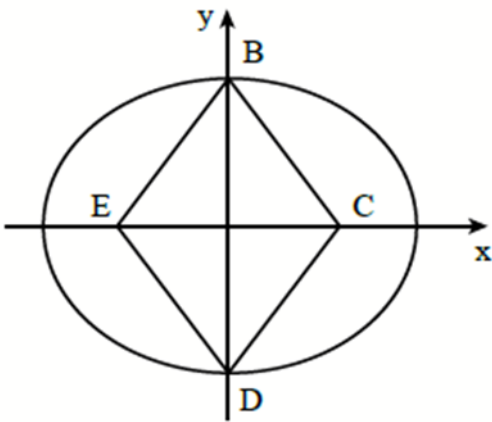
עבחן עס' 16

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים



1. נתון מעוין BCDE.

הקדקודים D ו-B נמצאים על ציר ה-y,

והקדקודים C ו-E נמצאים על ציר ה-x.

נתון: אורך צלע המעוין הוא 5,

אורך גובהו הוא 4.8,

ואורך האלכסון BD

גדול מאורך האלכסון CE.

דרך הקדקודים B ו-D עוברת אליפסה

קנונית (ראה ציור), שמוקדה הם הנקודות C ו-E.

א. מצא את השיעורים של קדקודי המעוין.

ב. מצא את משוואת האליפסה.

פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ חותכת את האליפסה ברביע הראשון

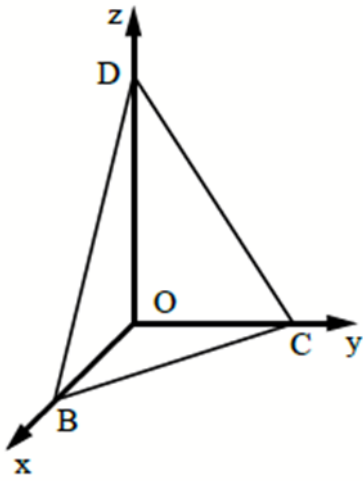
בנקודה M. נתון: שיעור ה-y של M הוא $\sqrt{15}$.

ב. הוכח שמוקד הפרבולה נמצא בנקודה C.

ג. דרך הנקודה E מעבירים ישר המקביל לציר ה-y.

P היא נקודה על הפרבולה שמרחקה מהישר הזה הוא k.

מצא את היחס $\frac{PC}{k}$. הסבר.



2. נתונה פירמידה משולשת OBCD ,

שבה $OD \perp OC$, $OC \perp OB$, $OB \perp OD$,
 כמתואר בציור.

נתון : $OD = 6$, $OC = 4$, $OB = 3$.

הנקודות K ו-P נמצאות על

המקצועות OB ו-OD בהתאמה,

כך שמתקיים : $OK:KB = 2:1$, $OP:PD = 1:1$.

דרך הנקודות K ו-P עובר מישור המקביל

למקצוע CD וחותך את OC בנקודה Q .

א. מצא את היחס בין OQ ל-QC .

נמק את תשובתך.

ב. מצא את היחס בין נפח הפירמידה OKPQ לנפח הפירמידה OBCD .

ג. מצא את הזווית בין הישר CB למישור KPQ .

3. z הוא מספר מרוכב. נתונים שני מקומות גאומטריים :

$$I. \quad z\bar{z} + i(z - \bar{z}) + z + \bar{z} = 0$$

$$II. \quad |z|^2 + i(\bar{z} - z) = 0$$

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

המקומות הגאומטריים הנתונים נחתכים בשתי נקודות $A(x_1; y_1)$

ו- $B(x_2; y_2)$ ($x_1 < x_2$) .

ב. מצא את השיעורים של הנקודות A ו-B .

ג. נתונה הנקודה $P(x_0; y_0)$.

הנקודה P נמצאת במרחק שווה מכל הנקודות שעל המקום

הגאומטרי I. נתון : $z_0 = x_0 + y_0 \cdot i$.

הוכח שהמספר הצמוד ל- z_0 נמצא על המקום הגאומטרי II .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $g(x) = 2x^2 + c$. c הוא פרמטר.
הפונקציה $f(x)$ מוגדרת כך: $f(x) = e^{g(x)}$.
הגרפים של פונקציות הנגזרת, $f'(x)$ ו- $g'(x)$, נחתכים בנקודה ששיעור ה- x שלה הוא 2.
א. מצא את c .
ב. (1) הוכח ש- $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
(2) מצא את שיעורי כל הנקודות שבהן הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ חותכים זה את זה.
(3) עבור אילו ערכי x $f'(x) > g'(x)$?
(4) סרטט סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ באותה מערכת צירים.
ג. נתון: $M(2;8)$, $N(-2;-8)$.
 MN הוא אלכסון של מלבן שצלעותיו מקבילים לצירים.
הראה שגרף הפונקציה $f'(x)$ מחלק את המלבן לשני חלקים שווים בשטחם.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x + m \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. m הוא פרמטר.
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון.
ב. (1) מצא את תחום הערכים של m .
(2) הבע את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ באמצעות m , וקבע את סוגה.
ג. הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ושיעוריה אינם תלויים ב- m .
(1) מצא את שיעורי הנקודה P .
(2) מצא את הערך של m שעבורו הנקודה P היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$.

- הצב את m שמצאת בתת-סעיף ג(2) וענה על הסעיפים ד-ה.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

- ה. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f(x) - x}{x}$. חשב את $\int_1^e g(x) dx$.

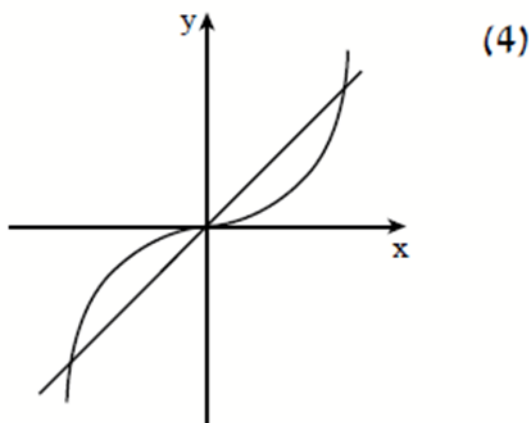
בהצלחה!

משאלות סופיות

4. נ. $c = -8$.

ב. (2) $(-2; -8)$, $(2; 8)$, $(0; 0)$.

(3) $x > 2$ ו $-2 < x < 0$.

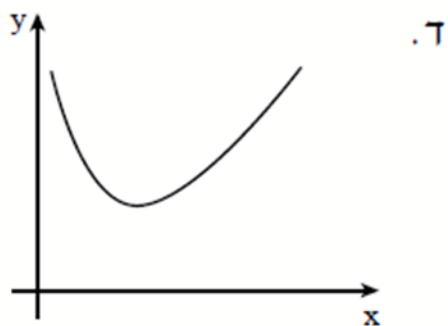


5. נ. $x > 0$.

ב. (1) $m > 0$.

(2) מינימום $(m; m(1 - \ln m))$.

ג. (1) $P(1; 1)$ (2) $m = 1$.



ה. $-\frac{1}{2}$.

1. נ. (1) $D(0; 4)$, $B(0; 4)$.

$E(-3; 0)$, $C(3; 0)$.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (2)$$

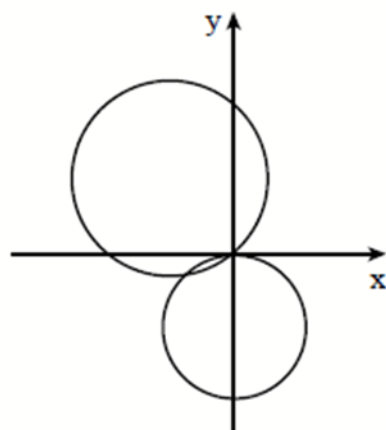
ב. מוקד הפרבולה $C(3; 0)$.

$$\frac{PC}{k} = 1 \quad \text{ג.}$$

2. נ. $OQ : QC = 1 : 1$.

ב. $\frac{1}{6}$ ג. 7.35° .

3. נ.



$$I \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$II \quad x^2 + (y+1)^2 = 1$$

ב. $A(-0.8; -0.4)$, $B(0; 0)$ ג. $n = 5$ ד.

עבחן פס' 17

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

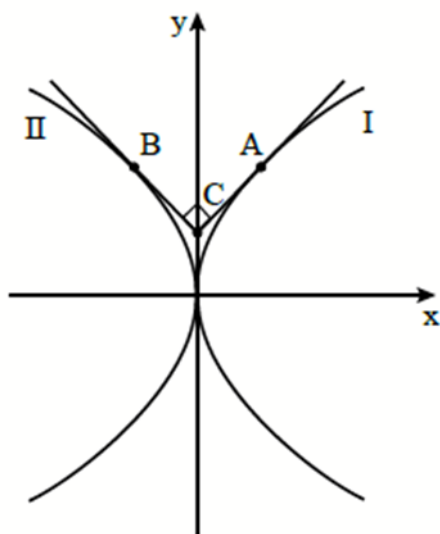
שים לב: אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונות שתי פרבולות:

$$I. \quad y^2 = 4x$$

$$II. \quad y^2 = -4x$$



A היא נקודה על פרבולה I.

B היא נקודה על פרבולה II.

הנקודות A ו-B נמצאות מעל ציר ה-x.

העבירו לפרבולות I ו-II משיקים

דרך הנקודות A ו-B, בהתאמה,

כמתואר בציור.

נתון ששני המשיקים מאונכים זה לזה

ונחתכים בנקודה C, הנמצאות על ציר ה-y.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

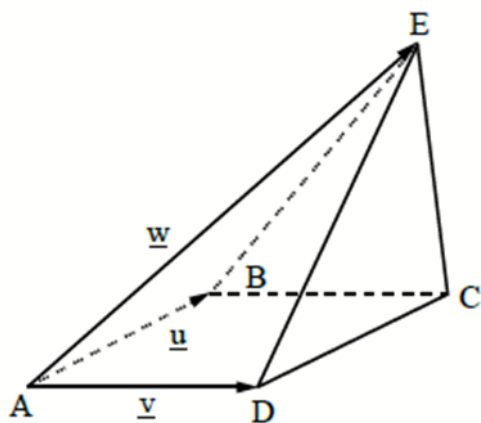
ב. נתון: A, B, C הם שלושה מקדקודיו של ריבוע ACBM.

(1) מצא את שיעורי הקדקוד M.

(2) נתון מעגל שמרכזו M.

המעגל משיק לישרים AC ו-BC.

מצא את משוואת המעגל, והסבר מדוע A ו-B הן נקודות ההשקה.



2. בפירמידה ABCDE שבסיסה ריבוע נתון: $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DE}$, הווקטור \overrightarrow{AE} יוצר זוויות שוות עם הווקטורים \overrightarrow{AD} ו- \overrightarrow{AB} , אורך צלע הבסיס הוא 5. נסמן: $\overrightarrow{AE} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$. (ראה ציור).

א. מצא את הערך של המכפלה הסקלרית $\underline{w} \cdot \underline{v}$ ושל המכפלה הסקלרית $\underline{w} \cdot \underline{u}$.

- הנקודה H נמצאת על המקצוע EC כך ש- $\overrightarrow{EH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$. נתון: $|\overrightarrow{AH}| = 2\sqrt{17}$.
 ב. מצא את אורך המקצוע AE.
 ג. (1) הראה כי המשולש EDC הוא ישר-זווית, ומצא את שטחו.
 (2) מצא את נפח הפירמידה המשולשת AEDC.

3. נתון: $z^2 - 2R \operatorname{cis} \theta \cdot z - 3R^2 \operatorname{cis}(2\theta) = 0$, z הוא מספר מרוכב, $0 < \theta < 90^\circ$, R הוא מספר ממשי חיובי. פתרונות המשוואה הנתונה הם z_1 ו- z_2 .
 z_1 נמצא ברביע הראשון.
 א. הבע באמצעות θ ו- R את z_1 ואת z_2 .

נתון כי משוואת הישר העובר דרך z_1 ו- z_2 היא $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.
 ב. מצא את θ .

המספר המרוכב z_3 מקיים: $z_3 = \bar{z}_1$.
 ג. (1) סרטט במישור גאוס את המספרים z_1, z_2, z_3 .

(2) נתון כי שטח המשולש $z_1 O z_3$ הוא $225\sqrt{3}$ (O – ראשית הצירים).
 מצא את הערך המוחלט של z_2 .

**פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**

4. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{ax^2+bx+2}$. a ו- b הם פרמטרים.
נתון כי הפונקציה זוגית.
א. מצא את b .

לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות פיתול.
ב. הוכח: $a < 0$.

הפונקציה הנתונה קעורה כלפי מטה \cap בתחום $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
וקעורה כלפי מעלה \cup בתחומים $x > \frac{1}{2}$ ו- $x < -\frac{1}{2}$.
ג. מצא את a .

ד. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים
(אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ה. סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.
ו. נתונה הפונקציה $h(x) = f'(x) \cdot f''(x)$.
מהו התחום שבו הפונקציה $h(x)$ חיובית?

5. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \ln(ae^x - be^{2x})$, $g(x) = \ln(2 - e^x)$.
 $a > 0$, $b > 0$. נתון: $a > 0$, $b > 0$.
א. ידוע שלשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה.
הוכח: $a = 2b$.

ב. ידוע שלשתי הפונקציות יש נקודה משותפת אחת בלבד.
נקודה זו היא נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$.
חשב את a , את b ואת שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$:
ג. הוכח כי $g(x)$ יורדת וקעורה כלפי מטה \cap בכל תחום הגדרתה.
ד. הוכח שההפרש בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הוא פונקציה קווית.
ה. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות $f(x)$
ו- $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטט על מערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של שתי
הפונקציות. בסרטוט הדגש את גרף הפונקציה $f(x)$.

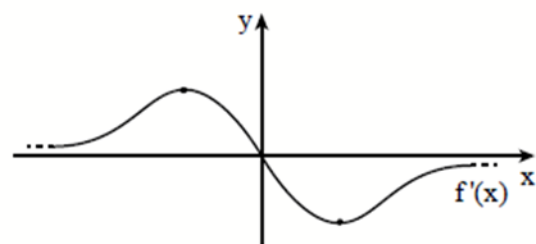
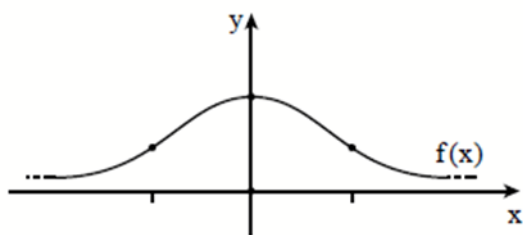
בהצלחה!

משוואות סופיות

4. נ. $a = -2$. $b = 0$. λ .

7. $y = 0$ (1)

(2)



ה.

1. $0 < x < \frac{1}{2}$ ו $x < -\frac{1}{2}$.

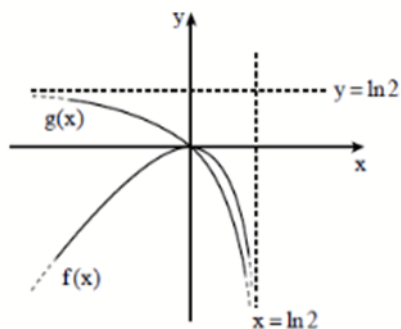
5. ב. $a = 2$, $b = 1$, $(0;0)$ מקסימום.

ד. הוכחה: $[f(x) - g(x) = x]$

ה. $f(x)$ (1) $x = \ln 2$.

$g(x)$: $x = \ln 2$, $y = \ln 2$.

(2)



1. נ. $A(1;2)$, $B(-1;2)$.

ב. $M(0;3)$ (1)

(2) $x^2 + (y-3)^2 = 2$.

2. נ. $\underline{w} \cdot \underline{v} = \underline{w} \cdot \underline{u} = 25$.

ב. $AE = 10$.

ג. $S_{EDC} = \frac{5 \cdot \sqrt{50}}{2} = 17.68$ (1)

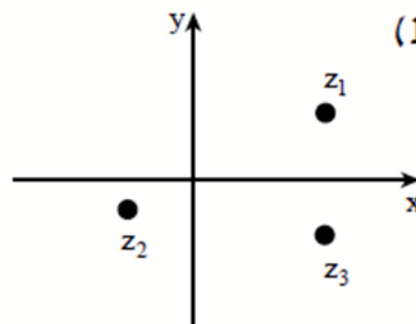
(2) $V_{AECD} = \frac{25\sqrt{50}}{6} = 29.46$.

3. נ. $z_1 = 3R \text{ cis } \theta$.

$z_2 = R \text{ cis } (180^\circ + \theta) = -R \text{ cis } \theta$

ב. $\theta = 30^\circ$.

ג. (1)



(2) $|z_2| = R = 10$.