

# מתכונת 581

**הוראות לשנת תשפ"ד (2024): חובה לענות על אחת מהשאלות 1,2,3, אחת מהשאלות 4,5 ואחת מהשאלות 6,7,8 ועוד שאלה בחירה חופשית. סך הכל יש לענות על 4 שאלות.**

## שאלה 1



ארנב וצב עשו תחרות ריצה אחד עם השני. הם יצאו בשעה 8:00 לעבר עץ האפרסקים.

מהירות הארנב גדולה פי 10 ממהירות הצב. אורך מסלול הריצה 50 מטר.

כעבור זמן מסוים מתחילת התחרות עצר הארנב והלך לישון, כאשר התעורר, ראה הארנב שהצב לידו במרחק 2 מטרים מעץ האפרסקים, מיד קם הארנב והתחיל לרוץ.

אבל הארנב ראה שהצב ממש איטי ולכן עצר שוב ל-182 שניות לאכול גזר. מייד כשסיים לאכול חזר לרוץ.

לבסוף הצב ניצח והגיע לעץ בהפרש של 2 שניות מהארנב.

מהירות הארנב והצב לא השתנתה לאורך התחרות. מהירות הארנב והצב נמדדה במטרים לשנייה.

א. מהי מהירות הארנב?

ב. כמה זמן ישן הארנב?

יום למחרת רצו הארנב והצב לעשות תחרות נוספת באותו מסלול, ועם אותה המהירות. הפעם הארנב החליט שייצא זמן מסוים אחרי הצב.

ג. אחרי כמה שניות צריך הארנב לצאת כדי לנצח את הצב בהפרש של 2 שניות?

## שאלה 2

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת  $A$ , ונתון:  $a_1 = -2$ , מנת הסדרה היא  $q$  והאיבר הכללי מסומן ב- $a_n$ .

נתונה סדרה נוספת  $B$ , המוגדרת לכל  $n$  טבעי:  $b_n = (a_n)^2$ .

א. הוכיחו כי סדרה  $B$  הנדסית אין-סופית מתכנסת.

ב. מצאו את  $b_1$ , והביעו את מנת הסדרה  $B$  באמצעות  $q$ .

ג. נתון:  $\frac{S_A}{S_B} = -\frac{5}{8}$ .

מצאו את  $q$ .

נתונה סדרה חשבונית חדשה  $C$  בעלת  $n$  איברים המוגדרת באופן הבא:

$$c_2 \cdot c_{n-1} = -6.5625, c_n = b_1, c_1 = a_1$$

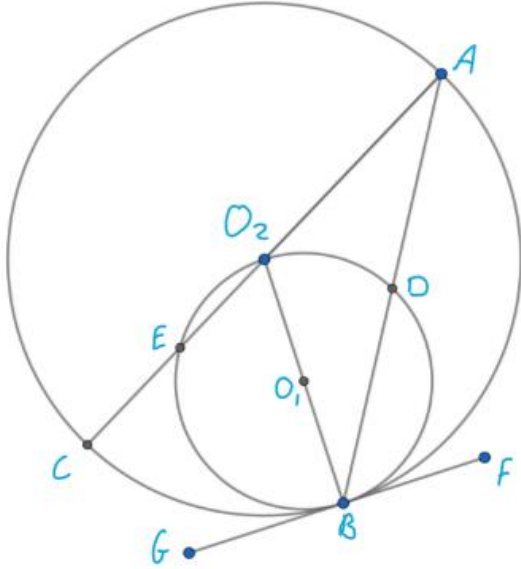
ד. מצאו את הפרש הסדרה ואת מספר האיברים בסדרה  $C$ .

### שאלה 3

בחנות מסוימת יש שתי מכונות. מכונה א של בקבוקי מים מינרליים, במכונה א יש שני סוגים של בקבוקים, מים רגילים ומים בטעם תפוח. במכונה ב יש חטיפים, חטיף מתוק וחטיף מלוח. ההסתברות שאדם אקראי יבחר 3 ימים ברציפות חטיף מתוק ומים בטעם תפוח היא 0.013824. ההסתברות שהוא יבחר מים רגילים וחטיף מלוח גדולה ב 0.2 מההסתברות שיבחר מים בטעם תפוח וחטיף מתוק. ההסתברות שהוא יבחר מים רגילים וחטיף מתוק גדולה ב 0.2 מההסתברות שיבחר במים בטעם תפוח וחטיף מלוח. מגיע אדם אקראי למכונות,

- א. מהי ההסתברות שיבחר מים בטעם תפוח וחטיף מתוק?
  - ב. מהי ההסתברות שיבחר מים בטעם תפוח?
  - ג. ידוע שהאדם בחר חטיף מתוק מהי ההסתברות שבחר במים רגילים?
- ביום מסוים מגיעים לחנות 10 אנשים. ידוע שכולם בחרו חטיף מתוק.
- ד. מהי ההסתברות ש- 6 מתוכם בחרו במים רגילים?

### שאלה 4



נתונים שני מעגלים המשיקים מבפנים בנקודה B. מרכז המעגל הקטן  $O_1$ , ומרכז המעגל הגדול  $O_2$ . הקטע GF משיק לשני המעגלים בנקודה B. הקוטר במעגל הגדול AC חותך את המעגל הקטן בנקודות  $O_2$  ו-E. המיתר AB חותך את המעגל הקטן בנקודה D.

א. הוכיחו: הנקודות B,  $O_1$ ,  $O_2$ , נמצאות על ישר אחד.

ב. הוכיחו:  $\triangle ADO_2 \sim \triangle ABC$ .

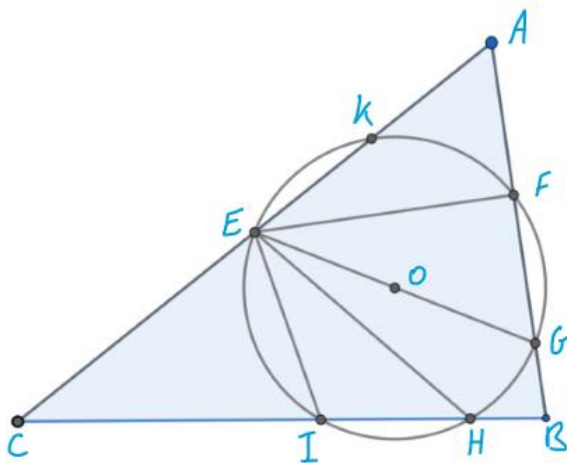
ג. נסמן  $S_{ADO_2} = S$ . הביעו באמצעות S את  $S_{CO_2DB}$ , ואת  $S_{CO_2B}$ .

ד. נסמן  $O_1O_2 = r$ ,  $BC = a$ .

ה. הביעו את  $S_{BEC}$  באמצעות S, r, a.

ו. נתון  $BC = BO_2$ . חשבו את  $\sphericalangle A$ .

### שאלה 5



מעגל שמרכזו O ורדיוסו R חותך משולש ABC ב-6 נקודות E, F, G, H, I, K (ראו סרטוט).

נתון:

$$\sphericalangle KEF = \sphericalangle FEG = \sphericalangle HEI = \alpha$$

א. הביעו באמצעות  $\alpha$  את זוויות המשולש AEG.

ב. הביעו באמצעות  $\alpha$  ו-R את צלעות המשולש AEG.

ג. נתון:  $\sphericalangle GEH = 15^\circ$ ,  $\sphericalangle IEC = 60^\circ$ . מצאו את זוויות המשולש ABC.

ד. נתון שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 14.

ה. מצאו את שטח המשולש ABC.

ו. הביעו באמצעות R את יחס השטחים של המשולש AEB והמשולש CEB.

**שאלה 6**

א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+1}{2x^2-5x-3}$

1. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
2. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.
3. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
4. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
5. סרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{2x+1}{f(x)}$

1. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
2. כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה- $x$  יש לפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה)?
3. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ ?
4. סרטטו את גרף הפונקציה  $g(x)$ .

ג. נתונה הפונקציה  $h(x) = \sqrt{g(x)}$

1. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $g(x)$ .
2. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$ ?
3. סרטטו את גרף הפונקציה  $h(x)$ .

**שאלה 7**

נתונה הפונקציה  $f(x) = (\sin x + \cos x)^n$  המוגדרת בתחום  $-\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$

$n \geq 2$  מספר טבעי.

- א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן. הביעו באמצעות  $n$  אם צריך, הפרידו למקרה שבו  $n$  זוגי או אי זוגי.
- ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, בשני המקרים.
- ד. סרטטו את גרף הפונקציה, בשני המקרים.

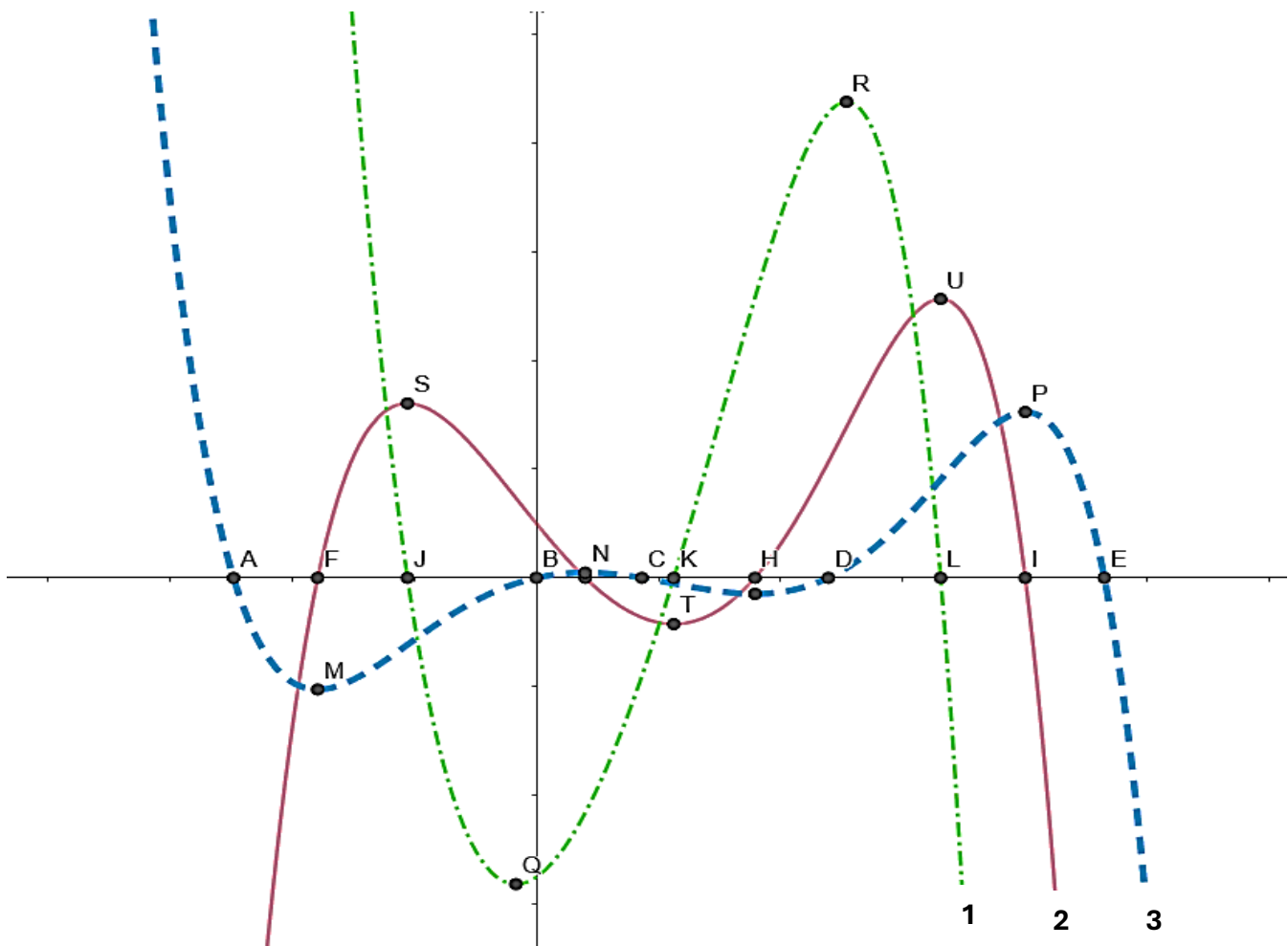
הציבו  $n = 2$  ופתרו את סעיף ה.

ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x + \frac{\pi}{4})$  המוגדרת בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$

1. האם הפונקציה  $g(x)$  היא פונקציה זוגית, אי זוגית, או לא זוגית ולא אי זוגית?

2. הוכיחו:  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx < 2\pi$

**שאלה 8**



לפניכם הגרפים של הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  והפונקציה  $F(x)$ , הפונקציה הקדומה של  $f(x)$ .

- א. התאימו בין הגרפים 1,2,3 לבין שלוש הפונקציות, נמקו.
- ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $f(x)$ ? נמקו.
- ג. מהם תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של  $f(x)$ ? הביעו באמצעות הנקודות הנתונות. (לדוגמה  $x_Z < x < x_W$ )

ד. נסמן  $T_1 = \int_{x_F}^{x_N} f(x) dx$ ,  $T_2 = \int_{x_N}^{x_H} f(x) dx$ ,  $T_3 = \int_{x_F}^{x_H} f(x) dx$

אילו מהטענות הבאות נכונות? נמקו:

1.  $T_3 < T_1$

2.  $T_3 = T_1 - T_2$

ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

1. העזרו בגרפים הנתונים וסרטטו את גרף הפונקציה.
2. השלימו את הפונקציה  $g(x)$  כך שתהיה פונקציה אי זוגית, נגדיר את הפונקציה החדשה כ-  $h(x)$ , סרטטו את  $h(x)$  באותה מערכת צירים עם  $g(x)$ .

3. חשבו את  $\int_{-2}^2 h(x) dx$ .



