

סימולציה עס' 4: שאלון 582, קיץ 2021 - סרור אסעד

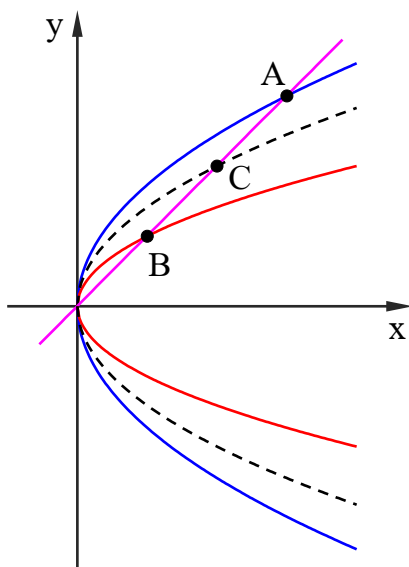
אוצה והערכה אספרי יאין על ההערוו הנבונות והשמות אצירק

פוקדש באהבה ליכדי הדרום, ולכל התלמידים היקרים שנבצר פהם להשתתף בעבחון בפועדו הפקורי. בהצלחה בתשעה ביוני.

ענה על שלוש פן השאלות ו-5 (לכל שאלה 1/3 נקודות)

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה

במרחב, מספרים מרוכבים



1. בציור נתונות שתי הפרבולות: (I) $y^2 = 2px$, ו- (II) $y^2 = 4x - 1$ ($p > 4$).

ישר העובר דרך ראשית הצירים חותך את פרבולה I בנקודה A

ואת פרבולה II בנקודה B. דרך הנקודה A העבירו ישר

המקביל לציר ה-y ודרך הנקודה B העבירו ישר המקביל

לציר ה-x. הישרים נפגשים בנקודה Q.

א. (1) הבע באמצעות p את משוואת המקום הגיאומטרי

של כל הנקודות Q הנוצרות באופן זה ברביע הראשון.

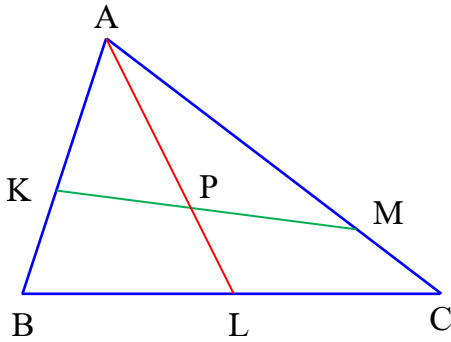
(2) מהי הצורה הגיאומטרית של המקום הגיאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף א'?

הפרבולה $y^2 = 8x$ חוצה את הישר AB בנקודה C.

ב. (1) מצא את p.

(2) מוקד הפרבולה I נמצא במרחק $\frac{6}{\sqrt{5}}$ מהישר AB. מצא את משוואת הישר AB.

(3) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה C וקוטרו הוא AB.



2. במשולש ABC הנקודות K, L, ו-M נמצאות בהתאמה

על הצלעות AB, BC, ו-AC בהתאמה ומקיימות:

$$AK : KB = 3 : 2, \quad BL : BC = 1 : 2, \quad \text{ו-} \quad CM : MA = 1 : 3.$$

הקטע KM חותך את הקטע AL בנקודה P.

$$\text{נסמן: } \vec{AB} = \underline{u} \text{ ו-} \vec{AC} = \underline{v}.$$

א. הבע את \vec{AK} , \vec{AL} , ו- \vec{AM} באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} .

ב. (1) הבע את \vec{BC} ו- \vec{KM} באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} .

(2) קבע האם $BC \parallel KM$? נמק.

ג. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את AL ואת KM.

$$3. \quad z_1 \text{ ו-} z_2 \text{ הם הפתרונות של המשוואה } z^2 - 4\cos\alpha \cdot z + 4 = 0, \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

נתון כי z_1 הוא פתרון למשוואה שנמצא ברביע הראשון.

א. (1) הבע את פתרונות המשוואה z_1 ו- z_2 באמצעות α .

(2) הוכח כי: $z_1^n + z_2^n$ הוא מספר ממשי טהור.

(3) הוכח כי: $z_1^n - z_2^n$ הוא מספר מדומה טהור.

ב. (1) נתון: $\alpha = \frac{\pi}{3}$. מצא את ההצגה האלגברית של z_1 ו- z_2 .

$$(2) \text{ הוכח: } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{3n} - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{3m+1} - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{3k+2} = 2 \quad (n, m, \text{ ו-} k \text{ מספרים טבעיים}).$$

ג. מצא את פתרונות המשוואה $w^3 = -\frac{1}{2}z_1^2 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024}$ (w הוא מספר מרוכב).

פרק שני – גזירה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. לפונקציה $f(x) = \frac{x}{a} - e^x$ ($a > 1$). היעזר ב- a במידת הצורך ומצא:

א. את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ב. את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. הסבר מדוע הפונקציה לא חותכת ציר ה- x .

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את התחום בו $f(x)$ שלילית וגם $f'(x)$ שלילית.

$g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = -f(x)$ ו- $h(x)$ היא הפונקציה $h(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ו. (1) היעזר בתשובה לסעיף א' ומצא את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגה.

(2) היעזר בתשובתך לסעיף א' ומצא את נקודת הקיצון של $h(x)$ וקבע את סוגה.

(3) שרטט סקיצות של הגרפים של הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ על אותה מערכת צירים.

ז. (1) הראה כי הגרפים של $f(x)$ ו- $f'(x)$ נפגשים בנקודת אחת בלבד. מצא שיעורי נקודה זו?

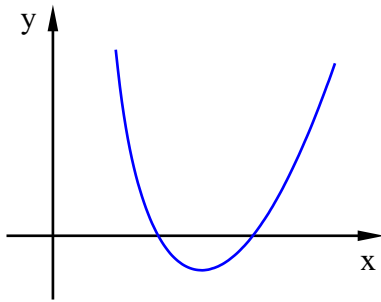
(2) האם קיים משיק משותף לגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ בנקודה שמצאת בסעיף

הקודם. נמק.

ח. נסמן: $S_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $S_2 = \int_{-1}^0 f'(x) dx$.

(1) הראה כי (אין צורך בחישוב אינטגרלים): $S_2 > S_1$.

(2) נתון: $S_1 - S_2 = \frac{3}{2e}$. מצא את a .



5. בציור מתואר גרף הפונקציה $g(x) = x^2 - 2x - 4 \ln(x - 1)$.

א. (1) היעזר במידת הצורך בגרף הנתון, ומצא לפונקציה:

תחום הגדרה, אסימפטוטות מאונכות לצירים,

נקודת קיצון וקבע את סוגה.

(2) חשב את $g(2)$.

(3) הסבר מדוע גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה הנמצאת בתחום $2.5 < x < 3$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)$ המקיימת: $f(x) = x - 3 + \frac{4 \ln(x - 1)}{x - 1} + \frac{5}{x - 1}$

(1) מצא לפונקציה: תחום הגדרה, אסימפטוטות מאונכות לצירים.

(2) הוכח כי: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - 1)^2}$

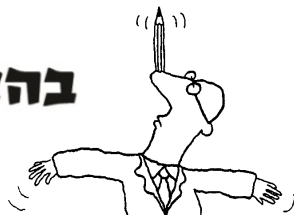
(3) נתון: $f(2.9) \approx 3.9$, $g(2.9) \approx 0$. מצא נקודות קיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישרים $y = x - 3$, $x = 2$ ו- $x = 5$.

בהצלחה!



תשובות סופיות

1. א. $y = 4 \cdot \sqrt{\frac{x}{2p}}$

ב. חצי הפרבולה $y^2 = \frac{8}{p}x$ ברביע הראשון.

ג. (1) $p = 6$

(2) $y = 2x$

(3) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$

2. א. $\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{v}$, $\vec{AL} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, $\vec{AK} = \frac{3}{5}\vec{u}$

ב. (1) $\vec{KM} = -\frac{3}{5}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}$, $\vec{BC} = -\vec{u} + \vec{v}$

(2) לא.

ג. $KP : PM = 4 : 5$, $AP : PL = 2 : 1$

3. א. (1) $z_2 = 2\text{cis}(-\alpha)$, $z_1 = 2\text{cis}\alpha$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

ב. (1) $z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$, $z_1 = 1 + \sqrt{3} \cdot i$

(2) הוכחה.

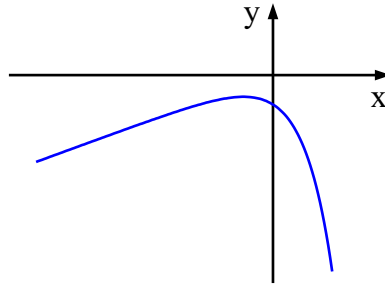
ג. $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_1 = -1$, $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. א. מקסימום $\left(-\ln a, -\frac{\ln a}{a} - \frac{1}{a}\right)$

ב. עולה בתחום: $x < -\ln a$, יורדת בתחום: $x > -\ln a$.

ג. $y_{\max} < 0$

ד. סקיצה:

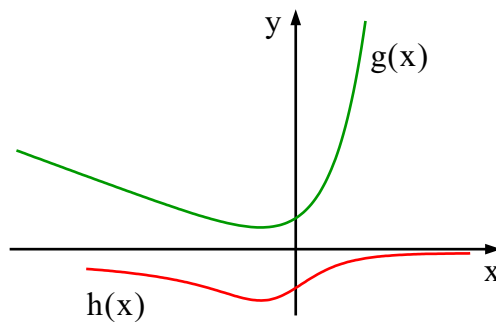


ה. $x > -\ln a$

ו. (1) מינימום $\left(-\ln a, \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}\right)$

(2) מינימום $\left(-\ln a, -\frac{a}{\ln a + 1}\right)$

(3) סקיצות:



ז. (1) $\left(1, \frac{1}{a} - e\right)$

(2) לא.

ח. (1) הוכחה.

(2) $a = e$

5. א. (1) תחום הגדרה: $x > 1$, אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x : $x = 1$

מינימום. $(2.414, -0.386)$

(2) $g(2) = 0$

ב. (1) תחום הגדרה: $x > 1$, אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x : $x = 1$

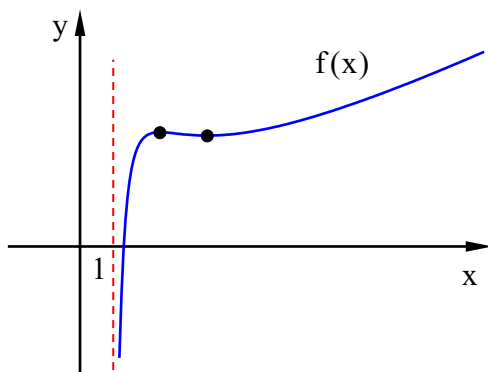
(2) הוכחה.

(3) (2,4) מקסימום, (2.9,3.9) מינימום.

(4) תחומי עלייה: $1 < x < 2$ או $x > 2.9$

תחום ירידה: $2 < x < 2.9$

(5) סקיצה:



ג. $8(\ln 2)^2 + 10\ln 2 \approx 10.775$