

סימולציה מס' 3: שאלון 581, קיץ 2021 - סרור אסעד

אוצה והערכה אפקרי יאין על ההערות הנבונות והשמות לזכר

ענה על 4 שאלות עבין 8 השאלות הבאות (לכל שאלה 25 נקודות)

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. שתי משאיות יצאו באותו זמן, אחת מנקודה A והשנייה מנקודה B, נסעו זו לקראת זו ונפגשו אחרי 1.2 שעות. המשאית שיצאה מנקודה A הגיעה לנקודה B שעה אחת לפני המשאית שיצאה מנקודה B הגיעה לנקודה A.
- בכמה שעות עברה כל משאית את המרחק בין נקודה A לנקודה B.

2. נתונה סדרה $a_n : a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ ונתונה סדרת הסכומים $S_n : S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$. S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .
- סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = t \cdot S_n + 2$, $S_1 = 2$, $t \neq 0$.
- א. הוכח: הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא t .
- ב. נתון: $|t| < 1$. בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו-II:

I. $a_5, a_9, a_{13}, a_{17}, \dots$

II. $a_4, a_6, a_8, a_{10}, \dots$

T הוא הסכום של אינסוף איברי הסדרה I,

M הוא הסכום של אינסוף איברי הסדרה II.

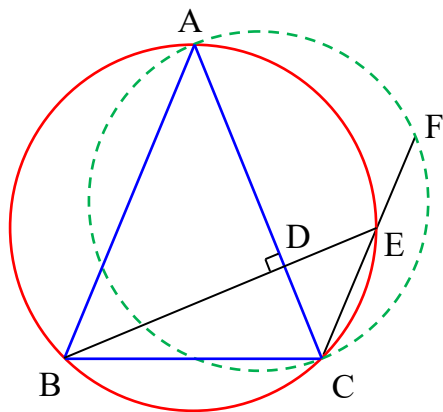
בטא באמצעות t את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

3. מערכת הבקרה של מטוס ללא טייס, המיועד לטיסות רחוקות, פועלת על 5 מנועים חדשים. אם אחד מהמנועים החדשים מפסיק לפעול המטוס נופל, לכן יש למטוס מנוע רזרבי שמתחיל לפעול במקרה שאחד מהמנועים החדשים מפסיק לפעול. ההסתברות שמנוע חדש יפסיק לפעול היא 0.1. ההסתברות שהמנוע הרזרבי יפסיק לפעול היא 0.2.

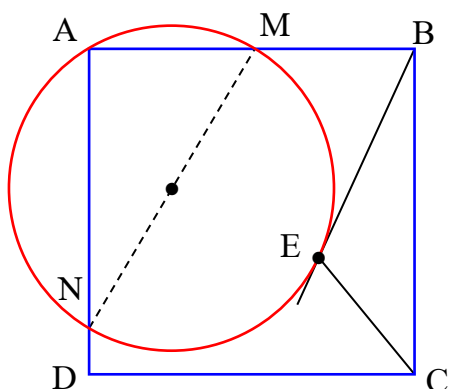
א. מה ההסתברות שבדיוק מנוע חדש אחד מבין חמשת המנועים החדשים יפסיק לפעול?
 ב. זמן קצר לאחר שהמטוס המריא התקלקל אחד מהמנועים החדשים ולכן המנוע הרזרבי החל לפעול.

- (1) מה ההסתברות שאחרי שהמנוע הרזרבי החל לפעול הוא יהיה המנוע היחיד שיתקלקל?
 (2) מה ההסתברות שאחרי שהמנוע הרזרבי החל לפעול בדיוק אחד מבין חמשת המנועים יתקלקל?
 (3) ידוע שאחרי שהמנוע הרזרבי החל לפעול התקלקל בדיוק אחד המנועים. מה ההסתברות שזה היה המנוע הרזרבי?

פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום במעגל. נתון: $BD \perp AC$. המשך BD חותך את המעגל בנקודה E . על השוק AC כקוטר, חגים מעגל החותך את המשך הקטע CE בנקודה F (ראה ציור).
- א. הוכח: המרובע $ADEF$ הוא בר חסימה.
 ב. הוכח: $BD = CF$.
 ג. נתון: $\angle BAC = 45^\circ$.
- (1) הוכח: המרובע $ABCE$ הוא טרפז שווה שוקיים.
 (2) נתון: $AB = b$. הבע באמצעות b את שטח המרובע $ABCF$.



5. נתון ריבוע ABCD. M היא אמצע הצלע AB. מעבירים מעגל

דרך הנקודות A ו-M החותך את הצלע AD בנקודה N. דרך הקודקוד B העבירו משיק למעגל זה, הפוגש את המעגל בנקודה E. קוטר המעגל שווה לאורך צלע הריבוע.

נתון: $BE = 6\sqrt{2}$ ס"מ.

א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. (1) חשב את הזווית CBE.

(2) האם: $BE \parallel MN$? נמק.

ג. (1) חשב את אורך הקטע CE.

(2) האם המשך הקטע CE עובר בקודקוד A? נמק.

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונאליות ופונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a^2 \cdot x^4 - \frac{3}{2}x^2$. $a > 0$ הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים הבאים. הבע באמצעות a אם צריך.

א. (1) הראה כי הפונקציה $f(x)$ זוגית.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) מצא את שיעורי נקודות הפיתול של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

נתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = 2$ הוא $\frac{1}{2}$.

ג. (1) מצא את ערכו של הפרמטר a אם ידוע $0 < a < \frac{3}{4}$.

(2) מצא את משוואת המשיק.

ד. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.

(3) היעזר בסעיפים א' ו-ב' ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

7. בשרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ המוגדרות וגזירות לכל ערך של x .

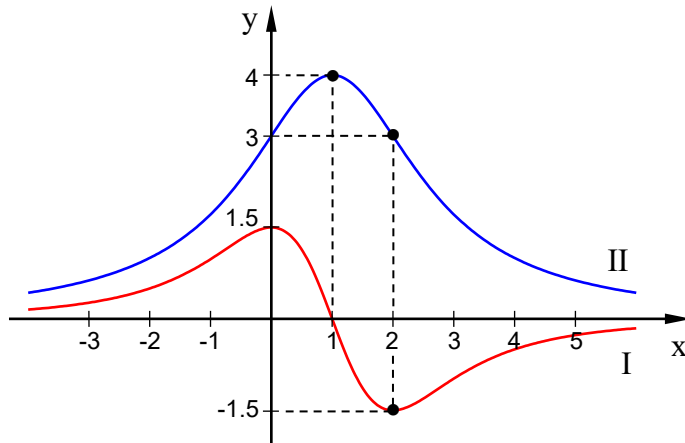
א. זהה איזה מן הגרפים I או II הנו הגרף של $f(x)$ ואיזה של $f'(x)$. נמק.

ב. (1) כמה פתרונות יש למשוואה $f''(x) = 0$? נמק.

(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$ אם ידוע שלגרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יש בדיוק

שלוש נקודות פיתול.

ג. חשב את ערך האינטגרלים:



$$\int_0^1 f'(x) dx \quad (1)$$

$$\int_0^1 f'(x) \cdot f(x) dx \quad (2)$$

$$\int_1^2 f'(x) \cdot f''(x) dx \quad (3)$$

$$\int_0^1 [f'(x) - f''(x)] dx \quad (4)$$

$$\int_0^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx \quad (5)$$

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx \quad (6)$$

ד. (1) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ששיפועו מקסימאלי.

(2) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ששיפועו מינימאלי.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = (\sin 2x)^2 + 2 \cdot \sin 2x + 2$.

א. הוכח (ללא שימוש בנגזרת): $f(x) \geq 1$ לכל x .

ענה על הסעיפים הבאים בהתאם לתחום $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$:

ב. (1) מצא את נקודת חיתוך הפונקציה עם ציר ה- y .

(2) מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

(4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

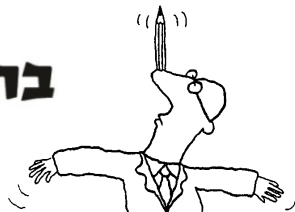
ג. $g(x)$ היא הפונקציה שמקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ בתחום $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון.

(3) הראה כי $\frac{\pi}{20} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx < \frac{\pi}{4}$.

בהצלחה!



תשובות סופיות

1. הזמן שלקח למשאית שיצאה מ-A ל-B הוא 2 שעות. הזמן שלקח למשאית שיצאה

מ-B ל-A הוא 3 שעות.

2. א. הוכחה.

ב. $\frac{1+t^2}{t}$

3. א. 0.32805

ב. (1) 0.13122

(2) 0.3645

(3) 0.36

4. א. הוכחה.

ב. הוכחה.

ג. (1) הוכחה.

(2) $\frac{b^2}{4}(1+\sqrt{2})$

5. א. 6 ס"מ.

ב. (1) 24.74°

(2) לא.

ג. (1) 5.57 ס"מ.

(2) לא.

6. א. (1) הוכחה.

(2) $(0,0), \left(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$

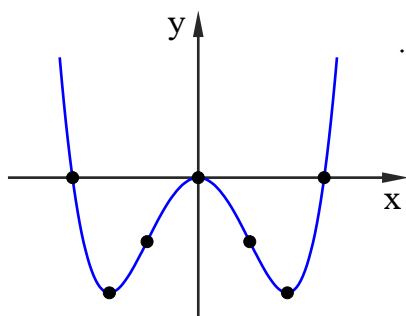
(3) מינימום $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2a}, -\frac{9}{16a^2}\right)$, מקסימום $(0,0)$, מינימום $\left(\frac{\sqrt{3}}{2a}, -\frac{9}{16a^2}\right)$

(4) נקודות פיתול: $\left(\frac{1}{2a}, -\frac{5}{16a^2}\right), \left(-\frac{1}{2a}, -\frac{5}{16a^2}\right)$

ב. סקיצה:

ג. (1) $a = \frac{1}{2}$

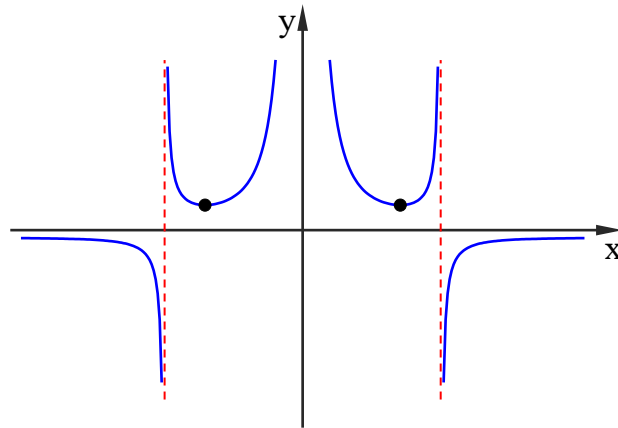
(2) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



ד. (1) $x \neq -\sqrt{6}, x \neq 0, x \neq \sqrt{6}$.

(2) לא.

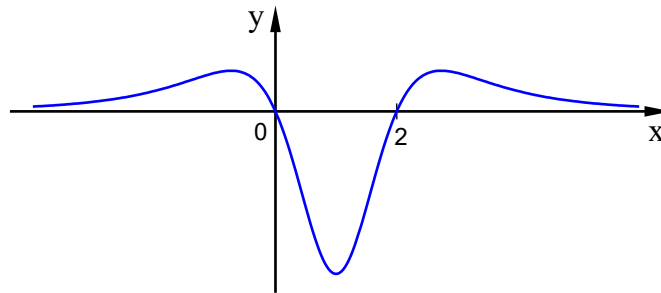
(3) סקיצה:



7. א. גרף I מתאר הפונקציה $f'(x)$; גרף II מתאר הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) שני פתרונות.

(2) סקיצה:



ג. (1) 1.

(2) $3\frac{1}{2}$.

(3) $1\frac{1}{8}$.

(4) $2\frac{1}{2}$.

(5) 0.

(6) $-2\frac{1}{2}$.

ד. (1) $y = 1\frac{1}{2}x + 3$.

(2) $y = -1\frac{1}{2}x + 6$.

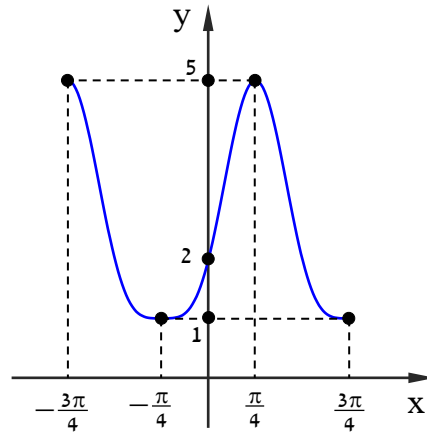
8. א. הוכחה.

ב. (1) (0,2).

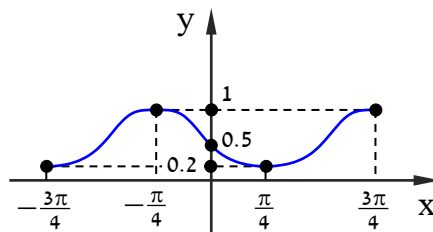
(2) מקסימום, $\left(-\frac{\pi}{4}, 1\right)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{4}, 5\right)$ מקסימום, $\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$ מינימום.

(3) עולה: $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$. יורדת: $-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4}$ או $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

(4) סקיצה:



ג. (1) כל x בתחום $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.



(2) סקיצה:

(2) הוכחה.