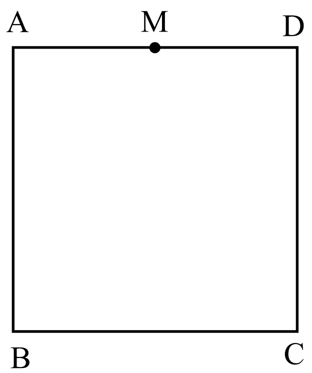
סימולציה מס' 1: שאלון 581, קיץ 2021 - סרור אסעד

תודה למפר יוין ולנצאר סלימאן על תרומתם בהגהה ובבדיקת השאלות

ענה על 4 שאלות מבין 8 השאלות הבאות (לכל שאלה 25 נקודות)

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. בציור מתואר מסלול לרכיבה באופניים בצורת ריבוע ABCD, שאורך צלעו a מטר.
שני רוכבי אופניים דני וארז יצאו באותו הזמן, דני יצא מן הנקודה A לכיוון הנקודה B וארז יצא מנקודה M אמצע AD לכיוון הנקודה B דרך הנקודה A. שניהם רכבו לאותו הכיוון לאורך המסלול הריבועי.
כל אחד מהם רכב במהירות קבועה.
המהירות של דני קטנה ב- 2 מטרים לשנייה מן המהירות של ארז.
כאשר ארז השלים 2.5 הקפות של המסלול הריבועי, הגיע דני אל הנקודה C <u>בפעם השנייה</u>.



א. (1) מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים.
(2) בטא באמצעות a את המרחק שעבר ארז לאחר יציאתו מן הנקודה M, ועד שהשיג את דני בפעם הראשונה?

ארז שיצא מנקודה M, ממשיך אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול הריבועי.

ב. (1) בטא באמצעות a את המרחק שעבר אותו דני, עד שארז הגיע לנקודה A בפעם השישית.
(2) קבע את מקומו של דני על המסלול הריבועי?

כאשר הגיע ארז (שיצא מנקודה M), אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול, הוא הסתובב והחל לרכוב לכיוון הנגדי – מן הנקודה A לכיוון הנקודה D, בלי לשנות את מהירותו. דני המשיך לרכוב בכיוון הנסיעה המקורי, בלי לשנות את מהירותו.
הרוכבים נפגשו בנקודה P.

ג. (1) מצא על איזו צלע של המסלול הריבועי נמצאת הנקודה P.
(2) מצא באיזה יחס הנקודה P מחלקת את הצלע שמצאת.

למחרת יצאו דני וארז באותו הזמן, מן הנקודה A לכיוון הנקודה B, והמשיכו לרכוב במסלול הריבועי, כל אחד מהם רכב באותה המהירות שרכב ביום שלפני כן.
ארז חלף על פני דני בפעם הראשונה 8 דקות אחרי שיצאו לדרך.

ד. (1) מצא את היקף המסלול הריבועי. נמק.
(2) איפה הייתה נקודת הפגישה בין שני הרוכבים.

2. בסדרה חשבונית שהפרשה הוא d $(d \neq 0)$, נתון כי הסכום של k איברים החל מהאיבר ה- m שווה לסכום של m איברים החל מהאיבר ה- k (m, $k \neq m$ ו- k מספרים טבעיים).

כלומר: $a_k + a_{k+1} + \ldots + \_\_\_\_\_\_ = a_m + a_{m+1} + \ldots + \_\_\_\_\_\_$.

א. השלם את שני האיברים החסרים במשוואה הנתונה.

ב. הוכח: $a_1 = \frac{1}{2}(3 - m - k)d$.

ג. (1) האם ייתכן כי: $a_1 = d$? נמק.

(2) האם ייתכן כי: $a_1 = -d$? נמק.

נתון: $a_1 = p \cdot d$.

ד. עבור אילו ערכי p, קיים פתרון בעל משמעות?

ה. (1) נתון: $p = -48$ ו- $m = 18$.

(2) חשב את k.

(3) הוכח: $a_{18} + a_{19} + \ldots + a_{80} = 0$.

3. ללהקת מחול בבית ספר גדול נרשמים תלמידים משתי שכבות יא ו- יב – בנים ובנות.
נתון שאם בוחרים באקראי 4 תלמידים אז ההסתברות שלכל היותר 3 מהם משכבת יא היא 0.8704. 75% מכלל התלמידים הנרשמים ללהקה הן בנות. מבדיקת רשימת התלמידים הנרשמים, נמצא כי ההסתברות לבחור באקראי נרשם משכבת יא, בהינתן שנבחר נרשם בן, קטנה פי 1.25 מההסתברות לבחור נרשמת בת, בהינתן שנבחר נרשם משכבת יב.

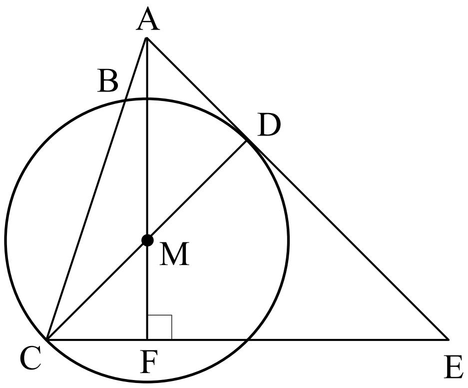
א. איזה אחוז מבין הבנות הן משכבת יב?

ב. בוחרים באקראי אחד מהתלמידים (בן או בת), שנרשמו ללהקה. ידוע שנבחרה בת.
מה ההסתברות שהיא נבחרה משכבת י״א?

ג. מבין הבנים שנרשמו ללהקה, בוחרים באקראי שני בנים ומבין הבנות שנרשמו ללהקה בוחרים באקראי שתי בנות. מה ההסתברות שכל הארבעה נבחרו משכבת י״א?

ד. בוחרים באקראי מהרשימה של התלמידים (בנים או בנות) הנרשמים חמישה נציגים למסיבת סיום שנה. חשב את ההסתברות שחלקם משכבת י״א וחלקם משכבת י״ב.

4. מנקודה A שמחוץ למעגל M יוצאים חותך ABC ומשיק AD.
מנקודה C יוצא חותך נוסף למעגל, החותך את המשך המשיק AD
בנקודה E. CD הוא קוטר המעגל. המשך הקטע AM חותך
CE בנקודה F. נתון: $AF \perp CE$.

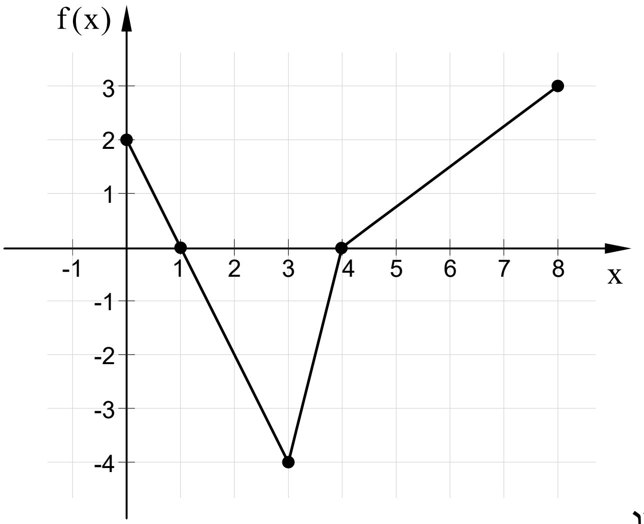


א. הוכח: $\Delta AMD \sim \Delta CED$.
ב. נתון: רדיוס המעגל M הוא R, $AB:BC=1:5$.
(1) הבע באמצעות R את אורך AM.
(2) הבע באמצעות R את אורך CE.

5. a, b ו- c הם אורכי הצלעות BC, AC ו- AB בהתאמה במשולש ABC.
נתון: $t=\frac{b+c}{11}=\frac{a+c}{12}=\frac{a+b}{13}$.
א. הבע את אורכי צלעות המשולש ABC באמצעות t.
ב. α, β ו- γ הן זוויות המשולש ABC שנמצאות מול הצלעות a, b ו- c בהתאמה.
הוכח: $\frac{\cos\gamma}{25}=\frac{\cos\beta}{19}=\frac{\cos\alpha}{7}$.
ג. חשב את זוויות המשולש ABC.
ד. נתון: $S_{ABC}=58.7878$. חשב את t.

6. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 8$.

מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = a + \int_0^x f(t)\,dt$, המוגדרת לכל x בתחום $0 \le x \le 8$.



א. (1) נתון: $g(1) = 5$. חשב את a.

(2) חשב: $g(0)$.

ב. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(2) מצא את $g(8)$.

(3) מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \le x \le 8$.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון.

מגדירים פונקציה חדשה $h(x) = \frac{g(x)}{x}$ בתחום $0 \le x \le 8$.

ד. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצא אסימפטוטה אנכית לציר ה-x של גרף הפונקציה $h(x)$.

ה. נתון: $g(7) = 3$, $g(8) = 5$.

חשב את האינטגרל $\int_7^8 \frac{g'(x)\cdot x - g(x)}{x^2}dx$.

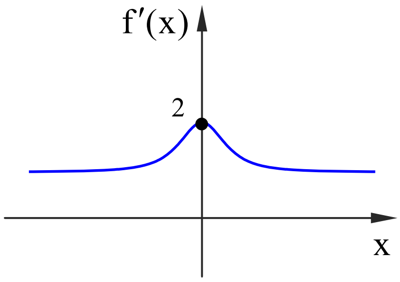
7. נתונה הפונקציה $f(x)=x\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

א. (1) הראה כי הפונקציה מוגדרת לכל x.

(2) הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

בציור שלפניך מתואר גרף פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.



ב. היעזר בציור במידת הצורך וקבע נכון/לא נכון לגבי כל אחת מהטענות הבאות ונמק.

(1) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בראשית הצירים.

(2) הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x.

(3) $\int_{-1}^{1} f(x)dx>0$.

(4) $2<\int_{-1}^{1} f'(x)dx<4$.

(5) למשוואה $f(x)=f'(x)$ קיים פתרון יחיד.

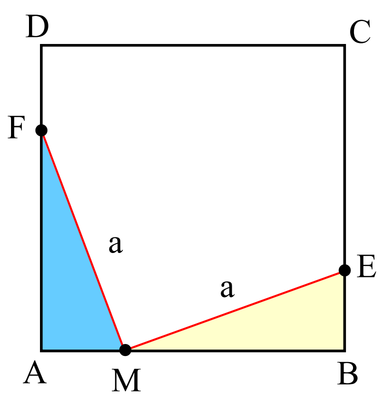
ג. הישר $y=mx$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x והנו המשיק בעל השיפוע הגדול ביותר מבין המשיקים לגרף הפונקציה.

(1) מצא את m.

(2) מצא את שיעורי נקודת הפיתול וקבע את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של $f(x)$.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

8. בריבוע $ABCD$ הנקודה E נמצאת על BC והנקודה F נמצאת על AD.
הנקודה M נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים: $ME=MF=a$
ו- $\sphericalangle FMA=2\sphericalangle EMB$ (ראה ציור).



א. הבע באמצעות a את אורך צלע הריבוע אם ידוע שסכום שטחי שני המשולשים AFM ו- BEM הוא מקסימלי.

ב. הבע באמצעות a את אורך הקטע FE כאשר השטח המתואר בסעיף א' הוא מקסימלי?

תשובות סופיות

1. א. (1) מהירות ארז 5 מטר לשנייה ומהירות דני 3 מטר לשנייה.

(2) $1.25a$.

ב. (1) $12.3a$.

(2) דני יהיה על הצלע AB במרחק $0.3a$ מנקודה A.

ג. (1) BC.

(1) $CP : PB = 5 : 11$.

ד. (1) 960 מטר.

(2) בנקודה C.

2. א. $a_k + a_{k+1} + \ldots + \underline{a_{k+m-1}} = a_m + a_{m+1} + \ldots + \underline{a_{m+k-1}}$.

ב. הוכחה.

ג. (1) לא.

(2) כן.

ד. $p = 0 , -\frac{1}{2} , -1 , -\frac{3}{2} , -2 , -\frac{5}{2} , -3 , \ldots$.

ה. (1) $k = 81$.

(2) הוכחה.

3. א. 40%.

ב. 0.6.

ג. 0.1296.

ד. 0.912.

4. א. הוכחה.

ב. (1) $AM = \frac{3\sqrt{5}}{5}R$.

(2) $CE = 3R$.

5. א. (1) $18t$.

(2) $c = 5t , b = 6t , a = 7t$.

ב. הוכחה.

ג. $\gamma = 44.4153^\circ , \beta = 57.1217^\circ , \alpha = 78.463^\circ$.

ד. $t = 2$.

.6 א. (1) $a = 4$.

(2) $g(0) = 4$.

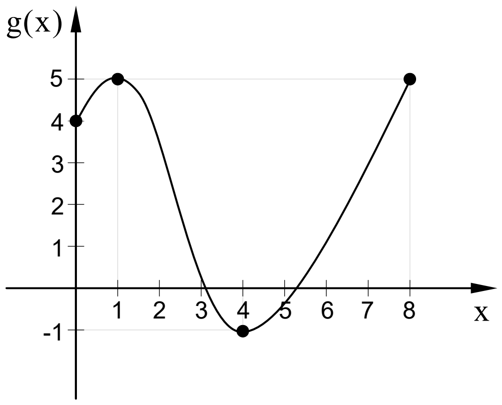
ב. (1) תחומי עלייה: $0 < x < 1$, $4 < x < 8$.

תחום ירידה: $1 < x < 4$.

(2) $g(8) = 5$.

(3) הערך המקסימלי הוא 5, הערך המינימלי הוא -1.

ג. סקיצה:



ד. (1) $0 < x \le 8$.

(2) $x = 0$.

ה. $\frac{11}{56}$.

.7 א. (1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) (0,0).

ב. (1) לא נכון.

(2) נכון.

(3) לא נכון.

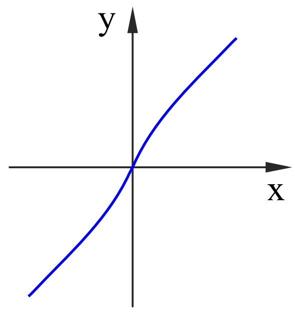
(4) נכון.

(5) נכון.

ג. (1) $m = 2$.

(2) (0,0) פיתול. תחום קעירות כלפי מעלה $x < 0$. תחום קעירות כלפי מטה: $x > 0$.

ד. סקיצה:



.8 א. $1.485a$.

ב. $1.527a$.