



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

מבחן מתכונת 3 – תש"ף

שאלון 035581

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.

משך המבחן: שלוש שעות וחצי.

מבנה השאלון: במבחן 3 פרקים.

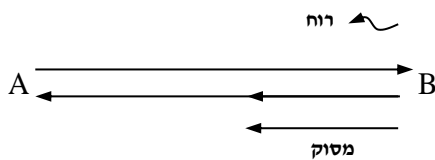
יש לענות על 5 שאלות מתוך 8. ניקוד על כל שאלה זהה.

מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.

שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לבנות ולבנים כאחד.

הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות)

פרק א' – אלגברה ובעיות מילוליות, סדרות, הסתברות



1. מטוס קל יוצא מדי יום בשעה 6:00 ממקום A, טס נגד כיוון הרוח למקום B וחוזר מיד למקום A. באחד הימים המטוס הגיע חזרה לנקודה A בשעה 18:30. המהירות העצמית של המטוס בטיסה ללא רוח גדולה פי 5 ממהירות הרוח.

א. באיזו שעה הגיע המטוס למקום B?

ב. ביום סוער מהירות הרוח גדלה ב-30 קמ"ש. לו היה המטוס טס ביום סוער זה, זמן טיסתו מנקודה A לנקודה B וחזרה לנקודה A היה גדל בשעה אחת. מצא את המהירות העצמית של המטוס ואת מהירות הרוח ביום רגיל. באחד הימים הרגילים, יצא מסוק מנקודה B בשעה 12:00 וטס לעבר הנקודה A במסלול מקביל למסלול הטיסה של המטוס. המטוס חלף על פני המסוק בשעה 16:30.

ג. האם הייתה זו הפעם הראשונה בה המטוס חלף על פני המסוק? נמק.

ד. מצא את המהירות העצמית של המסוק.

2. סדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה: $a_1 = 12$, $S_{n+1} = -\frac{1}{8}S_n + 12$

(S מייצגת את סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n)

א. הבע את a_n באמצעות S_n .

ב. הוכח שהסדרה a_n היא סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, ומצא את מנתה.

ג. ירון טוען שקיים איבר בסדרה השווה ל: $\frac{1}{k}$, כך ש k הוא מספר שלם. האם ירון צודק, טועה, או שלא ניתן לדעת? נמק קביעתך.

ד. נתונה סדרה הנדסית אינסופית חדשה b_1, b_2, b_3, \dots שמנתה q מקיימת $\frac{1}{8} < |q| < 1$.

נתון כי מתקיים: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$. מצא את q.



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

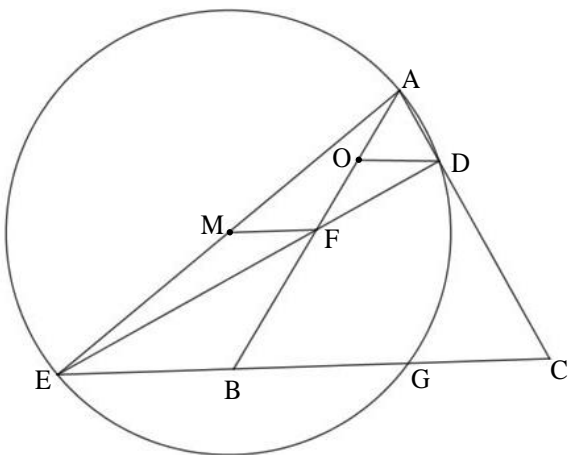
התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

3. בקופסה נמצאים 5 כדורים לבנים, 6 כדורים אדומים ו- 7 קוביות שחלקן לבנות והיתר אדומות. מוציאים בזה אחר זה, ללא החזרה, שני פריטים מהקופסה.
- א. מה ההסתברות שהוצאו שתי קוביות?

נתון כי ההסתברות שהוצאו שני פריטים השונים בצורתם ובצבעם היא $\frac{13}{51}$.

- ב. כמה קוביות לבנות וכמה קוביות אדומות בקופסה?
- ג. ידוע שהוצאו שני פריטים השונים בצורתם וגם שונים בצבעם. מה ההסתברות שהפריט הראשון שהוצא היה כדור?
- במשחק מסויים משתתפים 6 שחקנים. כל אחד מבין המשתתפים מוציא בתורו מהקופסה בזה אחר זה, 2 פריטים ללא החזרה ולאחר מכן מחזירים לקופסה. ניסיון "מוצלח" הוא ניסיון שבו הוצאו 2 כדורים אדומים. לכל משתתף תור אחד בדיוק.
- ד. מה ההסתברות שלכל היותר 4 מהמשתתפים, ולא פחות ממשתתף אחד, יבצעו ניסיון "מוצלח"?
- ה. בסיבוב נוסף של המשחק הוגדר כי מנצח במשחק הוא השחקן הראשון שמבצע ניסיון "מוצלח". ניצחון במשחק מביא לסיום המשחק. מה ההסתברות שלא יגיע תורו של השחקן החמישי?

פרק ב' – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

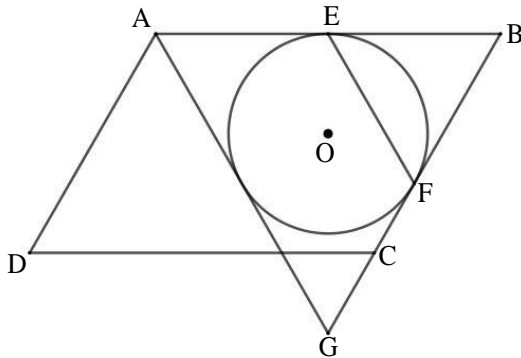


4. $\triangle ABC$ הוא משולש שווה צלעות. מנקודה E הנמצאת על המשך CB, מורידים אנך ED לצלע AC, החותך את AB בנקודה F. O הוא מרכז המעגל החוסם את המשולש $\triangle AFD$. M הוא מרכז המעגל החוסם את המשולש ADE. נתון: $BF = 2OD$, $BC = 2BE$.
- א. חשב את היחס: $\frac{AD}{DC}$.
- ב. הוכח: המרובע ODFM הוא מקבילית.
- ג. הצלע EC חותכת את היקף המעגל החוסם את המשולש $\triangle ADE$ בנקודה G. הוכח: המשולש $\triangle MDG$ שווה צלעות.
- ד. נתון כי שטח המרובע FDCB הוא 14 סמ"ר, חשב את שטח המשולש $\triangle MEF$.



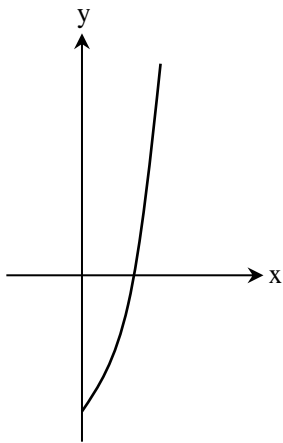
המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

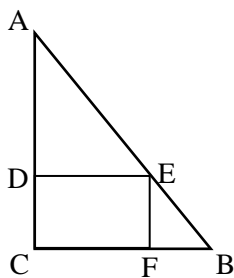


5. המרובע ABCD הוא מקבילית. המשך חוצה הזווית $\angle BAD$ חותך את המשך BC בנקודה G. המעגל O חסום במשולש ABG והוא משיק לצלעות AB ו- BG בנקודות E ו- F בהתאמה. נתון: $EF = b$.
 א. הבע באמצעות α ו- b את רדיוס המעגל O.
 ב. נתון בנוסף כי $AB = 2 \cdot EF$. חשב את α .

פרק ג' – חזו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי.



6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x - 18}{x + 3}$.
 בסרטוט מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $x \geq 0$.
 א. הראה כי מתקיים: $f(1) = 0$.
 ב. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם חלקו החיובי של ציר ה- x. מצא את השטח המוגבל על-ידי הגרף של $f(x)$, על-ידי המשיק ועל-ידי ציר ה- y.
 ג. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ עבור כל תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ה. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x) + a}$ (a פרמטר).
 האם מספר האסימפטוטות המקבילות לצירים שיש לפונקציה $g(x)$ תלוי ב- a? נמק קביעתך.



7. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, חסום מלבן CDEF. שתי צלעות המלבן DC ו- CF מונחות על ניצבי המשולש והקודקוד E מונח על היתר של המשולש (ראה ציור). אורך הצלע EF הוא a ס"מ ואורך אלכסון המלבן הוא $a\sqrt{5}$ ס"מ. נסמן: $\angle B = \alpha$.
 א. הבע באמצעות a ו- α את שטח המעגל החוסם את המשולש ABC.
 ב. מצא את גודל הזווית α , שעבורה שטח המעגל הוא מינימלי.

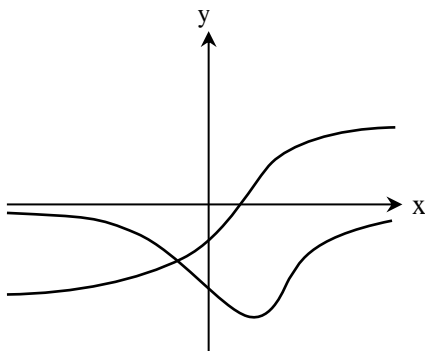


המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

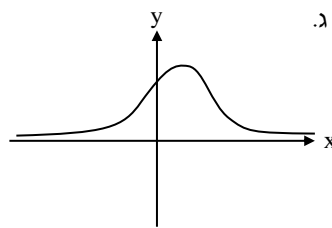
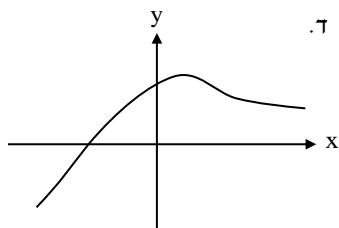
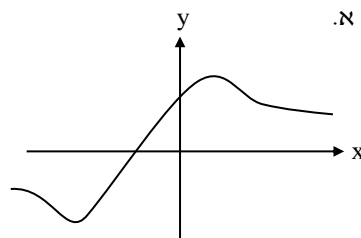
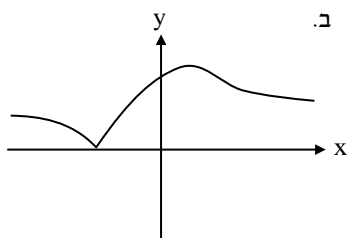
8. בשרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+2}} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{-5}{\sqrt{x^2-x+2}}$$



- א. (1) מצא את תחום ההגדרה שלכל אחת מהפונקציות.
 - (2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
 - (3) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מן הפונקציות עם הצירים.
- ב. ישר המקביל לציר ה- y חותך את אחת הפונקציות בנקודה P ואת הפונקציה השניה בנקודה Q . מצא את שיעורי הנקודות P ו- Q עבורם אורך הקטע PQ הוא מקסימלי.

ג. (1) קבע אילו מהשרטוטים א-ד מתאר את אורך הקטע PQ כפונקציה של x . נמק.



(2) קבע האם ייתכן שאורך הקטע PQ הוא 2? נמק קביעתך.

ד. נתון שהקטע PQ הינו בעל אורך מקסימלי. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הקטע PQ וישר המקביל לציר ה- x העובר בנקודת החיתוך של הפונקציות זו בזו.

בהצלחה!



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר
התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות סופיות

1. א. 13:30 ב. מהירות הרוח היא 45 קמ"ש, ומהירות המטוס 225 קמ"ש ג. לא. ד. 135 קמ"ש

2. א. $a_n = 9S_n - 96$ ב. $-\frac{1}{8}$ ג. טועה ד. $q = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

3. א. $\frac{7}{51}$ ב. 3 קוביות אדומות ו-4 קוביות לבנות

ג. $\frac{1}{2}$ ד. 0.4615 ה. 0.3381

4. א. $\frac{1}{3}$ ב. הוכחה ג. הוכחה ד. 2 סמ"ר

5. א. $\frac{b}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ ב. 60°

6. א. הוכחה ב. 1.5 יח' שטח ג. עלייה: $x < -3, x > -3$ ירידה: אף x ד.

ה. לא

7. א. $\frac{\pi a^2}{4} \left(\frac{2}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right)^2$ ב. 38.41°

8. א. (1) $f(x)$, כל x ; $g(x)$: כל x . ב. $\left(-2, -\frac{5}{\sqrt{8}}\right)$ (2)

(3) $f(x)$: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $g(x)$: $\left(0, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

ג. (1) גרף ב' (2) כן ד. $\frac{4\sqrt{14}}{5}$ יח' שטח ב. $(1.2, -3.34), (1.2, 0.935)$

