

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

מבחן מתכונת 2 – תש"ף

שאלון 035581

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.

משך המבחן: שלוש שעות וחצי.

מבנה השאלון: במבחן 3 פרקים.

יש לענות על 5 שאלות מתוך 8. הניקוד על כל שאלה זהה.

מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.

שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לבנות ולבנים כאחד.

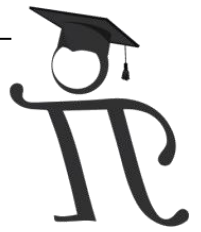
הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

פרק א' – אלגברה ובעיות מילוליות, סדרות, הסתברות

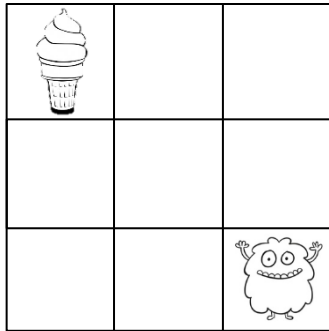
- בשעה 7:00 בבוקר יצא הולך רגל מפתח-תקווה לכיוון נתניה. בשעה 8:00 יצא הולך רגל אחר מנתניה לפתח-תקווה לקראת הולך הרגל הראשון והלך באותה המהירות כמו הולך הרגל הראשון. הם נפגשו t שעות לאחר צאתו של הולך הרגל מפתח-תקווה והמשיכו בדרכם. הולך הרגל שיצא מפתח-תקווה המשיך ללכת במהירות הקטנה ב-1 קמ"ש ממהירותו הקודמת, ואילו הולך הרגל שיצא מנתניה המשיך ללכת במהירות הקטנה ב-2 קמ"ש ממהירותו הקודמת. הולך הרגל שיצא מפתח-תקווה הגיע לנתניה שעתיים ו-24 דקות לפני שהולך הרגל השני הגיע לפתח-תקווה.

 - בטא באמצעות t את מהירות הולכי הרגל עד פגישתם. (תוכל להשאיר שורש בתשובתך).
 - נתון כי שני הולכי הרגל הלכו במהירות 6 קמ"ש עד המפגש. באיזו שעה נפגשו הולכי הרגל?
 - עבור הערך של t שמצאת בסעיף ב', האם קיים ערך נוסף למהירות של שני הולכי הרגל עד המפגש (פרט ל-6 קמ"ש) עבורו יש פתרון לבעיה? נמק.
 - ידוע כי במהלך הליכת שני הולכי הרגל היה המרחק ביניהם m ק"מ פעמיים בדיוק. מצא את ערכי m האפשריים.
- A היא סדרה אינסופית מתכנסת שאיבריה הם: a_1, a_2, a_3, \dots . ערכו של כל איבר הוא פי m מסכום כל האיברים הנמצאים אחריו (m פרמטר).

 - הבע באמצעות m את מנת הסדרה ומצא את ערכי m האפשריים.
 - נתונה הטענה הבאה: "בסדרה זו סכום ריבועי איברי הסדרה הנמצאים במקומות הזוגיים, קטן בהכרח מריבוע סכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים". קבע האם הטענה נכונה או שגויה. נמק קביעתך בפירוט.
 - נתון בנוסף, כי סכום ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה הוא 50. ההפרש בין האיבר השלישי לאיבר השני גדול פי $\frac{64}{27}$ מההפרש בין האיבר החמישי לאיבר השישי. חשב את m ואת סכום הסדרה A.

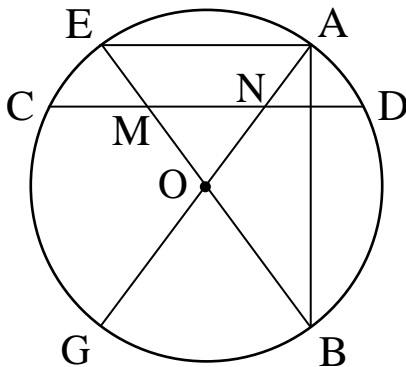


המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה



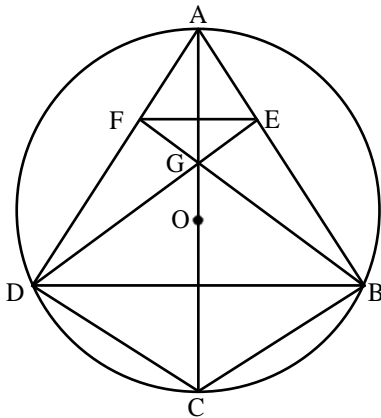
3. במשחק מחשב ישנו ריבוע המורכב מ-9 משבצות לבנות. במשבצת הימנית תחתונה נמצא ייצור, ובמשבצת השמאלית העליונה נמצאת גלידה (ראה סרטוט). בכל תור השחקן לוחץ על העכבר של המחשב. בכל לחיצה על העכבר הייצור נע משבצת אחת כלפי מעלה או משבצת אחת שמאלה על פי החלטה שרירותית של המחשב (הסיכוי לבחירה בצעד שמאלה ובחירה בצעד למעלה, שווה). הייצור לא יכול לנוע ימינה, למטה או באלכסון. אם הייצור יוצא מהלוח המשחק מסתיים.
- א. בהנחה שלוחצים על העכבר מספיק פעמים (עד שהייצור זוכה בגלידה או עד שהמשחק נגמר), מהי ההסתברות שהייצור יזכה בגלידה?
- ב. בהנתן כי הייצור זכה בגלידה, מהי ההסתברות שהוא עבר במשבצת האמצעית של הלוח?
- ג. בשלב הבא במשחק, הלוח מגודר כך שהייצור לא יכול לצאת מהלוח. בכל תור שבו הייצור סמוך לגבולות הריבוע ולא יכול לנוע, הוא נשאר במקום והשחקן לוחץ שוב על העכבר לניסיון נוסף, וכך שוב ושוב, עד שיזכה הייצור בגלידה.
- ידוע שהייצור זכה בגלידה לאחר 7 לחיצות עכבר בדיוק. מה ההסתברות שהייצור נתקע באותה משבצת במשך שלושה תורות רצופים?

פרק ב' – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. במעגל שרדיוסו 5 ס"מ מעבירים שני מיתרים AB ו-CD המאונכים זה לזה. שני הקטרים BE ו-AG נפגשים בנקודה O ומחלקים את המיתר CD לשלושה קטעים שווים כך שמתקיים: $CM = MN = ND$. נתון גם: $AB = 8$ ס"מ.
- א. הוכח: המרובע EANM בר חסימה במעגל.
- ב. חשב את אורך הקטע MN. (בתשובתך השאר 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית)
- ג. הנקודה H מונחת על AG כך שמתקיים $BH \perp AG$. חשב את אורך הקטע BH.
- ד. דרך הנקודה B מעבירים משיק למעגל, החותך את המשך הקוטר AG (מהצד של G) בנקודה F. חשב את אורך הקטע GF.

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה



5. הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל שמרכזו O. AC הוא קוטר במעגל. הנקודות E ו-F נמצאות על המיתרים AB ו-AD בהתאמה, כך שמתקיים: $EF \parallel DB$. הקטעים DE ו-BF נחתכים על הקוטר AC בנקודה G (ראה ציור).
נתון: המרובע BCDG הוא מעוין.
נסמן: רדיוס המעגל R והזווית $\angle GBD$ היא α .
א. הבע באמצעות R ו- α את היחס בין שטח המעוין BCDG לבין שטח המשולש $\triangle FGE$.
ב. הבע באמצעות R ו- α את אורך הקטע GO.
ג. נתון כי: $AF = \frac{3}{8}AD$. הבע באמצעות R ו- α את אורך הקטע FO.

פרק ג' – חזו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{mx^2 - 7mx + 10}{3x^3 - 30x^2 + 75x}$

- א. נתונה הטענה הבאה: "מספר האסימפטוטות האנכיות לפונקציה $f(x)$ אינו תלוי ב-m". קבע האם הטענה נכונה או שגויה. נמק קביעתך.

הצב $m = 0$ וענה על הסעיפים הבאים:

- ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ג. מצא את תחומי עליה וירידה של הפונקציה.
ד. מצא את האסימפטוטות לפונקציה המקבילות לצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = \sqrt[k]{(f(x))^{k+3}}$ (שם $k > 0$).

עבור כל טענה מהטענות הבאות, קבע אם הטענה נכונה או שגויה. נמק קביעתך.

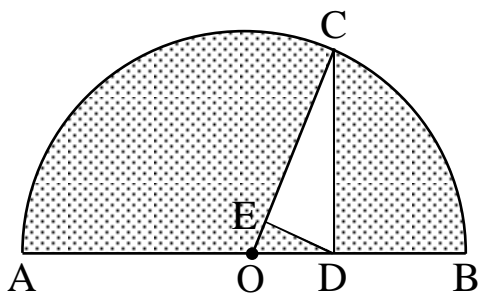
- (1) לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ אותו תחום הגדרה.
(2) הפונקציה $g(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה.
(3) לכל x_1 שעבורו: $g(x_1) < f(x_1)$ מוגדרים, מתקיים: $f(x_1) - g(x_1) \geq 0$.

ז. נתונה הפונקציה: $h(x) = (f(x))^{1.6}$.

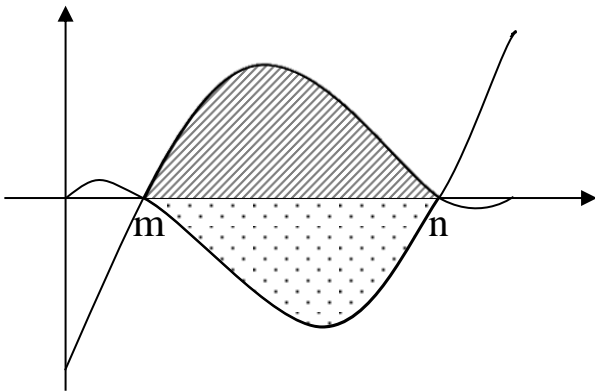
העתק למחברתך את גרף הפונקציה $f(x)$ והוסף לשרטוט בקו מקווקו את גרף הפונקציה $h(x)$. במידת הצורך, היעזר בסעיפים הקודמים.

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה



7. הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O. מימין למרכז O בוחרים על הקוטר נקודה D ומעלים ממנה אנך ל-AB, החותך את חצי המעגל בנקודה C. בנוסף, מנקודה D מעבירים אנך לרדיוס OC. אנך זה חותך את הרדיוס בנקודה E (ראה ציור).
- א. חשב מה צריך להיות אורך הקטע OD כדי שהשטח המנוקד יהיה מינימלי (במידת הצורך הבע באמצעות R).
- ב. חשב את השטח המינימלי (במידת הצורך הבע באמצעות R).



8. בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{\cos 3x - \cos x + \sin x}{a} \quad (1)$$

$$g(x) = a(\sin 3x + \sin x - \cos x) \quad (2)$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ בתחום: } (a > 0)$$

- א. מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מן הפונקציות עם ציר ה-x.
- ב. מצא את a עבורו השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות f(x) ו-g(x) בתחום: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, הוא מינימלי.

הצב בשתי הפונקציות a = 1 וענה על הסעיפים הבאים:

- ג. הפונקציות הנתונות נחתכות על ציר ה-x בנקודות המסומנות m ו-n (ראה ציור). הוכח כי השטחים המוגבלים בין כל אחת מהפונקציות וציר ה-x (השטח המקוקו והשטח המנוקד, ראה ציור) שווים זה לזה.
- ד. משרטטים גרף נוסף של פונקציה חדשה k(x). השטח הכלוא בין גרף הפונקציה k(x), גרף הפונקציה f(x), ושגבולותיו הם m ו-n, גדול פי 2 מסכום השטחים המסומנים בשרטוט. הצע ביטוי אלגברי עבור 2 פונקציות אפשריות ל k(x).
- ה. נתונה הפונקציה: $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

$$\text{ללא ביצוע חקירה נוספת, שרטט את גרף הפונקציה } h(x) \text{ בתחום: } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

בהצלחה!

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות סופיות

1. א. $\frac{26+5t \pm \sqrt{25t^2 + 260t + 4}}{14}$ ב. $t = 4$ ג. לא קיים. ד. $0 < m \leq 32.4$

2. א. $m > 0$ או $m < -2$ ב. הטענה נכונה ג. $m = -\frac{7}{3}$, $S = 73\frac{1}{7}$

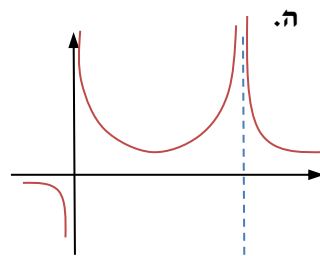
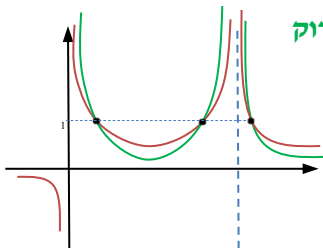
3. א. $\frac{3}{8}$ ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$

4. א. הוכחה ב. 3.04 ס"מ ג. 4.8 ס"מ ד. $12\frac{6}{7}$ ס"מ

5. א. $\frac{2}{\cos^2 2\alpha}$ ב. $R(1 - 2\cos 2\alpha)$ ג. $\frac{R}{4}\sqrt{16 - 15\cos^2 \alpha}$

6. א. נכונה ב. $\left(1\frac{2}{3}, \frac{9}{50}\right) \min$ ג. עלייה: $1\frac{2}{3} < x < 5$, ירידה: $x > 5$, $0 < x < 1\frac{2}{3}$, $x < 0$

ז. הגרף בירוק



ד. $x = 5, x = 0, y = 0$

7. א. $\frac{R}{2}$ ב. $\frac{R^2}{32}(16\pi - 3\sqrt{3})$

8. א. $f(x) : \left(\frac{\pi}{12}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{12}, 0\right), (0, 0)$ ג. $g(x) : \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{12}, 0\right), \left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$

ב. $a = 1$ ג. הוכחה

ד. $3(\sin 3x + \sin x - \cos x)$ או $5(\cos 3x - \cos x + \sin x)$

