



# המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

## התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

### מבחן מתכונת 1 – תש"ף

#### שאלון 035581

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.

משך המבחן: שלוש שעות וחצי.

מבנה השאלון: במבחן 3 פרקים.

בפרק א' עליך לבחור שתי שאלות מתוך שאלות 1-3

בפרק ב' עליך לבחור שאלה אחת מתוך שאלות 4-5

בפרק ג' עליך לבחור שתי שאלות מתוך שאלות 6-8

מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.

שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לבנות ולבנים כאחד.

הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות)

#### פרק א' – אלגברה ובעיות מילוליות, סדרות, הסתברות (40 נקודות)

עליך לענות על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות)

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. רוכב אופניים א' ורוכב אופניים ב' יצאו זה לקראת זה משני מקומות A ו-B בהתאמה. המרחק בין המקומות

A ו-B הוא 9m ק"מ. רוכב ב' יצא לדרך שעתים וחצי אחרי שרוכב א' יצא לדרך. בשעה  $14^{30}$  התברר שכל

אחד מן הרוכבים עבר שליש מן המרחק בין המקומות A ו-B. למחרת שוב יצאו הרוכבים זה לקראת זה.

הפעם הם יצאו בו זמנית ונפגשו כעבור 9 שעות.

המהירות של כל אחד מהרוכבים הייתה קבועה ולא השתנתה ביום השני.

א. איזה מן הרוכבים מהיר יותר? נמק.

ב. הבע בעזרת m את המהירויות של כל אחד מן הרוכבים.

ג. רוכב א' עבר כל קילומטר בזמן הארוך ב-  $1\frac{1}{4}$  דקות מן הזמן בו עבר רוכב ב' כל קילומטר.

חשב את המרחק בין A ו-B.

ד. באיזו שעה יצא לדרך רוכב א' ביום הראשון?

2. נתונה סדרה חשבונית  $a_n$ . סכום כל איברי הסדרה הוא 185. סכום שני האיברים האחרונים הוא 77.

האיבר הראשון של הסדרה הוא -4.

א. מצא את מספר האיברים בסדרה ואת הפרשה.

מגדירים שתי סדרות נוספות:  $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$  ו-  $c_n = b_{n+1} - b_n$ .

ב. הוכח שהסדרה  $c_n$  היא סדרה חשבונית.

ג. בסדרה  $c_n$  ישנם  $2n$  איברים. סכום  $n+2$  האיברים האחרונים הוא 8,220.

מצא את מספר האיברים בסדרה  $c_n$ .

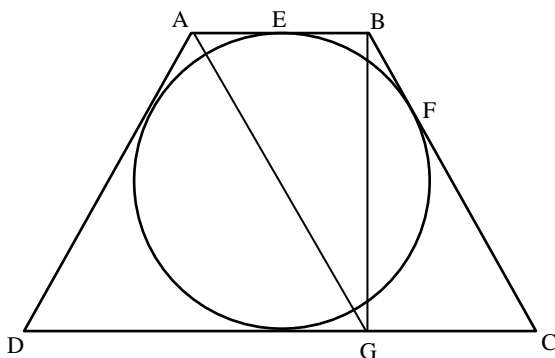
## המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

### התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

3. אם נבחר באקראי באחד האזרחים הבוגרים בארץ, ההסתברות שיש בידו רישיון נהיגה היא  $p$ . נערך סקר בקרב אזרחים בוגרים מתל-אביב, חיפה ובאר-שבע. מספר האזרחים תושבי חיפה שהשתתפו בסקר גדול פי 3 ממספר האזרחים תושבי באר-שבע שהשתתפו בסקר, וקטן פי 2 ממספר האזרחים תושבי תל-אביב שהשתתפו בסקר. א. חשב את ההסתברות שנבחר תושב תל-אביב. אם נבחר באקראי אזרח תושב חיפה, ההסתברות שיש בידו רישיון נהיגה היא 0.7. אם נבחר באקראי אזרח שיש בידו רישיון נהיגה, אז ההסתברות שהנו תושב באר-שבע היא 0.08. נבחר באקראי אזרח כלשהו. ב. בטא באמצעות  $p$  את ההסתברות שנבחר תושב תל-אביב מבין האזרחים שיש ברשותם רישיון נהיגה. ג. מצא את ערכי  $p$  עבורם מעל 50% מבין בעלי רישיון נהיגה הם תושבי תל-אביב. ד. נתון כי 28% מבין האזרחים שיש ברשותם רישיון נהיגה, הנם תושבי חיפה. מצא את  $p$ . ה. האם נכון לומר: אם נבחר באופן מקרי באחד מבעלי רישיון הנהיגה, רוב הסיכויים שהוא תושב תל-אביב? נמק. (ענה על סמך סעיפים קודמים, ללא חישובים נוספים).

#### פרק ב' – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

עליך לענות על שאלה אחת מתוך השאלות 4-5. (20 נקודות)  
שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

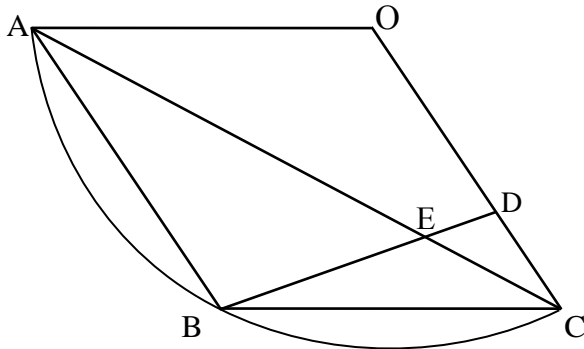


4. בטרפז שווה שוקיים  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$  חסום מעגל. המעגל משיק לצלע  $AB$  בנקודה  $E$ , ולצלע  $BC$  בנקודה  $F$ . נתון כי  $AB = a$ ,  $DC = b$ . הישר  $BG$  הוא גובה הטרפז. א. הבע את אורך הקטע  $DG$  באמצעות  $a$  ו- $b$ . ב. הוכח: הקטע  $AG$  עובר דרך מרכז המעגל. נתון: הקטע  $DF \perp BC$ . היקף הטרפז  $ABGD$  הוא:  $(10 + \sqrt{12})$  ס"מ. ג. מצא את  $a$  ואת  $b$ . ד. מעגל נוסף שמרכזו  $O_2$  משיק לקטע  $AB$  בנקודה  $E$  ולקטע  $AG$  בנקודה נוספת. חשב את רדיוס המעגל  $O_2$ .



# המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

## התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה



5. נתון מעוין ABCO שקודקדיו A, B, C מונחים על קשת מעגל שמרכזו O.  
א. מצא את זוויות המעוין.

הנקודה D נמצאת על הצלע OC, והנקודה E היא נקודת החיתוך של הקטעים AC ו-BD.  
נתון בנוסף כי:  $3DC = OC$ .

ב. מצא את זוויות המשולש  $\triangle BDC$ .

ג. נתון כי אורך הקשת ABC שווה ל  $4\pi$  ס"מ.

מצא את רדיוס המעגל החוסם את משולש  $\triangle BEC$ .

**פרק ג' – חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי. (40 נקודות)**

עליך לענות על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות)

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. א. הוכח: אם מתקיים  $f(x) = -f(-x)$ , אזי מתקיים:  $f'(x) = f'(-x)$ . מה המשמעות של טענה זו?

ב. הוכח: אם מתקיים  $f(x) = f(-x)$ , אזי מתקיים:  $f'(x) = -f'(-x)$ . מה המשמעות של טענה זו?

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x(m-x^2)}{(x^2+m)^3}$ ,  $m > 0$ . פרמטר,  $m$ .

ג. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ד. הוכח שהפונקציה היא אי-זוגית.

ה. מצא כמה נקודות מינימום וכמה נקודות מקסימום יש לפונקציה (במידה וקיימות).

ו. הסימן  $f^n$  מייצג את הנגזרת ה-n-ית של הפונקציה הנתונה  $f(x)$ .

לדוגמה: עבור  $n=1$ :  $f^1$  היא הנגזרת הראשונה, עבור  $n=3$ :  $f^3$  זו הנגזרת השלישית, וכן הלאה.

קבע לגבי כל אחד מההיגדים האם הוא נכון או לא נכון. הנח כי  $f^n$  גזירה לכל  $x$ . נמק קביעתך בקצרה.

(1)  $f^{12}$  היא פונקציה זוגית.

(2) לפונקציה  $f^9$  יש נקודת קיצון על ציר ה-y.

(3)  $\int_0^a (f^{10}) dx = \int_{-a}^0 (f^{10}) dx$  (a פרמטר,  $a > 0$ ).



# המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

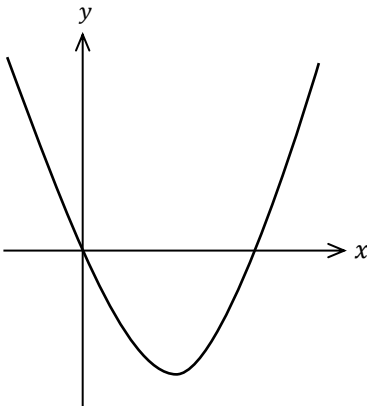
## התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\sin^2 x$ , בתחום  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן (באם קיימות).
- מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה (באם קיימות).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את השיפוע המקסימלי של המשיק לפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $f''(x)$ , שהיא הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$ . דרך שתי נקודות החיתוך הימניות ביותר של  $f''(x)$  עם ציר ה- $x$  בתחום  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ , העבירו שני ישרים המאונכים לציר ה- $x$ .

- הוכח כי בין ישרים אלה מתקיים:  $f(x) > f'(x)$ .
- חשב את השטח המוגבל בין הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  (גרף הנגזרת הראשונה) ושני הישרים.



8. נתונה הפרבולה:  $f(x) = x^2 - 6x$ , ונתונים הישרים:  $x = a$ ,  $x = a + 2$  ( $a$  פרמטר).

- מצא את ערכו של  $a$ , עבורו השטח הכלוא בין גרף הפרבולה, שני הישרים הנתונים וציר ה- $x$  הוא מינימלי. בפתרוןך התייחס ל-3 מצבים: השטח כולו מעל ציר ה- $x$ , השטח כולו מתחת לציר ה- $x$ , חלק מהשטח מעל ציר ה- $x$  וחלק אחר מתחת לציר ה- $x$ .

ב. נתונה הפרבולה:  $g(x) = x^2 - 6x + k$ , ( $k$  פרמטר).

- נתון כי קיימים לפחות שני ערכי  $k$  שונים עבורם השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $g(x)$ , הישרים:  $x = b$ ,  $x = b + 2$  וציר ה- $x$  הוא מינימלי עבור אותו ה- $b$ .

מצא את  $b$ , ושני ערכי  $k$  אפשריים המקיימים זאת. נמק קביעתך.

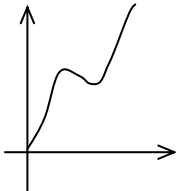
**בהצלחה!**



# המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

## התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

### תשובות סופיות

1. א. רוכב ב'      ב. 0.4m קמ"ש רוכב א', 0.6m קמ"ש רוכב ב'.      ג. 360 ק"מ.
  - ד. 7:00 בבוקר.
2. א.  $d = 5, n = 10$       ב. 20
3. א. 0.6      ב.  $\frac{0.92p - 0.21}{p}$       ג.  $0.5 < p \leq 1$       ד. 0.75      ה. נכון
4. א.  $\frac{a+b}{2}$       ב. הוכחה      ג.  $a = 2, b = 6$  (בס"מ)      ד.  $R_{O_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
5. א.  $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$       ב.  $60^\circ, 19.11^\circ, 100.89^\circ$       ג. 3.968 ס"מ
6. א. לפונקציה אי-זוגית, נגזרת זוגית  
 ב. לפונקציה זוגית, נגזרת אי-זוגית  
 ג. כל  $x$       ד. הוכחה  
 ה. 2 נקודות מינימום ו-2 נקודות מקסימום.
7. א.  $(1.5\pi, 6.71)$  מקסי,  $(\frac{11\pi}{12}, 3.014)$  מיני,  $(\frac{7\pi}{12}, 3.69)$  מקסי,  $(0, 0)$  מיני.  
 ב.  $(\frac{\pi}{4}, 1.78)$ ,  $(\frac{3\pi}{4}, 3.35)$ ,  $(\frac{5\pi}{4}, 4.92)$       ג.       ד.  $m = 3$
8. א.  $a = 2 \pm \sqrt{8}$       ב.  $b = 2, k \geq 8$       ג. 3.927 יח"ר      ה. הוכחה