מורים יקרים

לפניכם בחינת מתכונת ארכימדס למועד קיץ 2021 שאלון 581 **לשימוש כבחינה בלבד** על ידי **מורים**.
אנא הקפידו **שלא להעביר את הבחינה בתפוצה שכוללת תלמידים ולא לפתור אותה איתם**.

בדומה לספרי ההכנה של ארכימדס לבגרות, המתכונת מכוונת ל"**יותר חשיבה ופחות חישובים**" ומנסה **להתחקות ככל הניתן אחרי סגנון בחינות הבגרות האחרונות**. ספרי ההכנה של ארכימדס כוללים עשרות בחינות מתכונת - חלקן עם פתרון מלא כולל הדרך - ומהווים **כלי מצוין להכנה לבחינת הבגרות**.

לקראת מועדי הבגרות, ניתן להפנות את התלמידים:

- לרכישת **עותק דיגיטלי מוזל** של ספרי ההכנה לבגרות של ארכימדס באתר Classoos בקישור: https://my.classoos.com/il/search/store/ארכימדס (הזמנה מתאפשרת רק ממחשב, לא מסלולארי)
- הזמנה **מרוכזת לבית הספר** (או לבית המורה) ניתן לבצע בטלפון: 052-2285566 או לפנות במייל: archimedes100@gmail.com.
- ניתן להזמין ספר הביתה עם שליח באתר ארכימדס בקישור: https://bit.ly/3ndOdNg.

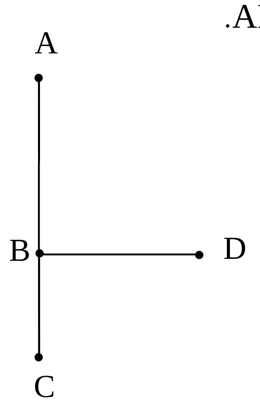
.

בהצלחה!

שאלון 581 - מתכונת למועד קיץ 2021

לפניך שאלון הכולל 8 שאלות. בחר 4 שאלות מתוכן וענה עליהן (לכל שאלה 25 נקי)

פרק ראשון - אלגברה והסתברות



1. הנקודות A, B, C ו-D ממוקמות כמתואר בשרטוט. נתון: $AC \perp BD$, $AB = 32$ ק"מ.
ב-8:00 יצא נשר מהנקודה B והחל לעוף במהירות קבועה לנקודה D.
ב-11:00 יצאה חסידה מהנקודה A והחלה לעוף לנקודה C במהירות קבועה שהייתה גבוהה פי 2 ממהירות הנשר. ב-14:00 עצר הנשר ל-4.5 שעות מנוחה.
כשחידש את מעופו, החלה מנשבת רוח במהירות 2 קמ"ש מהנקודה B לנקודה D.
בשעה 13:00 היה המרחק בין השניים שווה למרחק ביניהם בשעה 21:30, כאשר נפסקה הרוח. החסידה עברה בנקודה B מתישהו בין השעות 13:00 ו-21:30.
   א. חשב את מהירויות המעוף של הנשר ושל החסידה (המהירויות במספרים שלמים).
   ב. נתון שבשעה 21:30 השניים הגיעו ליעדיהם. הנשר הסתובב מיד והחל חוזר לנקודה B. החסידה נחה בנקודה C זמן מה, ואז החלה במעוף בחזרה לנקודה A. מרגע שהחלו במעוף חזור, הנשר הגביר את מהירותו באחוז מסוים והחסידה הפחיתה מהירותה **באותו אחוז** כך שהגיעו יחד לנקודה B. שעה לפני שנפגשו, כאשר שניהם במעופם, היה המרחק מהנשר ועד לנקודה B גדול פי 1.5 מהמרחק מהחסידה ועד לנקודה B.
      1. מצא באיזו שעה נפגשו הנשר והחסידה.
      2. חשב מה היה משך המנוחה של החסידה לפני שהחלה במעופה חזרה לנקודה B.

2. בסדרה החשבונית a_n יש $3n$ איברים $(1 < n)$. האיבר הראשון בסדרה הוא a_1 וההפרש d.
סכום n האיברים **האחרונים** בסדרה שווה לסכום $2n$ האיברים האחרים בה.
   א. לפניך שתי טענות. עבור כל טענה קבע האם היא נכונה או שגויה:
      i. אם הסדרה a_n יורדת אז כל איבריה שליליים.
      ii. אם בסדרה a_n מספר זוגי של איברים אז יתכן שסכום n האיברים הראשונים הוא זוגי.
   ב. נתון שסכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא שלילי. קבע איזו מהטענות הבאות היא הנכונה:
      i. $a_1 < d$ ii. $a_1 = d$ iii. $a_1 > d$
   ג. יוצרים סדרה חדשה b_n המוגדרת כך: $b_n = |a_n| - 5$. נתון שבכל אחת מהסדרות a_n ו-b_n יש 9 איברים. נתון שסכום הסדרה b_n הוא 117. מצא את d וחשב את סכום הסדרה a_n.

3. בשק א' יש 4 פלפלים ירוקים ו-2 פלפלים צהובים. בשק ב' יש 3 פלפלים ירוקים ו-3 פלפלים צהובים.
אנטון מטיל קוביה הוגנת. אם מתקבלת אחת מהספרות 1 או 2, הוא מוציא באקראי פלפל משק א'.
אם מתקבלת הספרה 3, הוא מוציא באקראי פלפל משק ב'.
אם מתקבלת ספרה אחרת, הוא בוחר באקראי אחד מהשקים ומוציא ממנו פלפל.

א. קבע איזה פלפל - ירוק או צהוב - סביר יותר שאנטון יוציא. נמק את תשובתך.

ב. אנטון החזיר את הפלפל שהוציא לשק שממנו הוצא, הוציא פלפל לפי הכלל שתואר, החזיר לשק ממנו הוצא ושוב הוציא וכך המשיך. אנטון חזר על התהליך 5 פעמים. ידוע שבחלק מההוצאות יצא פלפל ירוק ובחלקן יצא פלפל צהוב. חשב את ההסתברות שאנטון הוציא פלפל צהוב רק פעמיים.

ג. אנטון החזיר את הפלפל שהוציא לשק שממנו הוצא. כעת לקח קוביה חדשה **שאינה הוגנת**.
בקוביה זו, ההסתברות לקבל את הספרה 3 זהה להסתברות שהיתה לו היתה הקוביה הוגנת.
קבע איזו מהטענות הבאות נכונה לגבי הפלפל שיוציא אחרי הטלת **הקוביה החדשה**. נמק:

i. ניתן לקבוע כי סביר יותר שאנטון יוציא פלפל צהוב.

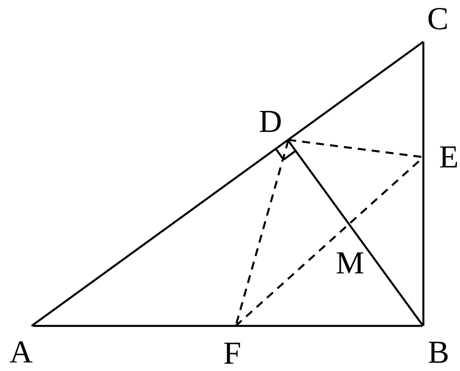
ii. לא ניתן לדעת אם סביר יותר להוציא פלפל ירוק או צהוב.

iii. ניתן לקבוע כי סביר יותר שאנטון יוציא פלפל ירוק.

פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. א. הוכח את המשפט: "במשולשים דומים היחס בין חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון".

ב. במשולש ישר הזווית ΔABC שלפניך הקטע BD הוא הגובה ליתר.
הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta BCD$.



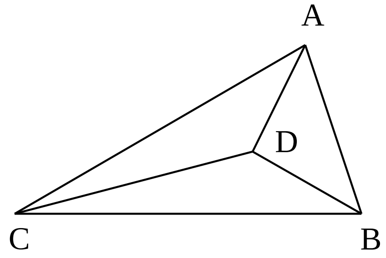
ג. הקטעים DE ו-DF הם חוצי זוויות במשולשים ΔBCD ו-ΔABD בהתאמה. הוכח: $\frac{BC}{AB}=\frac{ME}{MF}$.

ד. לפניך שתי טענות. עבור כל טענה קבע האם היא נכונה או שגויה. נמק את תשובתך:

i. ניתן לחסום את המרובע BEDF במעגל.

ii. הקטע BD ארוך יותר מהקטע EF.

5. הנקודה D נמצאת בתוך המשולש ΔABC כך שהקטע AD חוצה את הזווית $\measuredangle BAC$.



נתון: $\measuredangle BAD=\alpha$, $AC=4AD$, $AB=2AD$.

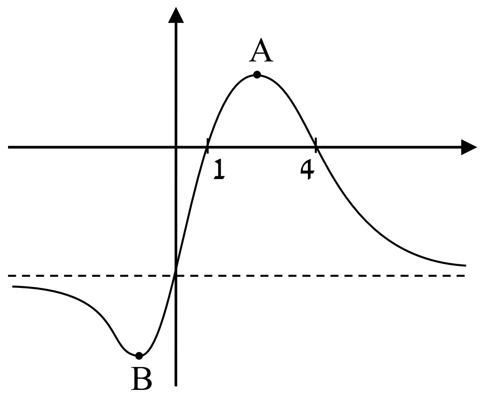
א. הבע באמצעות $\cos\alpha$ את יחס שטחי המשולשים: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}}$.

ב. נתון: $BD=m$, $BC=3m$.

נתון שיחס השטחים שמצאת בסעיף א' גדול מ-3.

1. מצא את α.
2. המשולש ΔABC חסום במעגל. הבע באמצעות m את אורך הקשת הקצרה BC.

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות שורש, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות



6. נתון גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

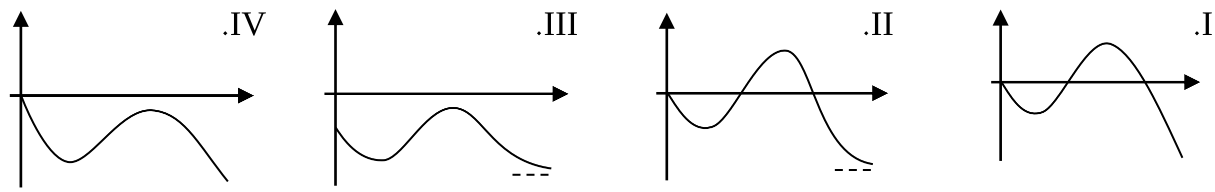
מגדירים את הפונקציה $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ בתחום: $0\le x$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ בתחום: $0\le x$.

ב. קבע האם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית. נמק.

ג. נתון שהשטח הכלוא בין גרף $f(x)$ לבין ציר ה-x גדול מהשטח הכלוא בין גרף $f(x)$ לבין הצירים.

קבע איזה מהגרפים הבאים עשוי להיות גרף $g(x)$:

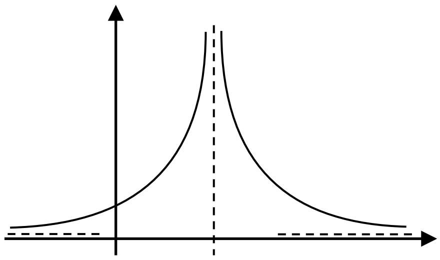


ד. נתון: $f(x)=\frac{24x}{x^2-2x+4}-8$. עבור הפונקציה $f(x)$:

1. מצא את שיעורי נקודות הקיצון A ו-B וקבע את סוגן.
2. מצא את האסימפטוטה האופקית.
3. קבע כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x)=g(x)$. נמק את תשובתך.

ה. נתונה הפונקציה: $h(x)=\sqrt{|f(x)|}$.

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.
2. קבע האם לפונקציה $h(x)$ יש אסימפטוטות. נמק את תשובתך.
3. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ וקבע את סוגן.



7. לפניך גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{8}{(x-5)^2}$.

א. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. הנקודה $B(t,y_B)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $0<t<5$. הישר $y=y_B$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות B ו-C. הקטע BC הוא צלע במלבן שאחת מצלעותיו נמצאת על ציר ה-x.

1. הבע באמצעות t את שיעור ה-x של הנקודה C.
2. מצא את t שבעבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. נתון: היקף המלבן הוא 12 יח'.
חשב את השטח המוגבל בין הצלע השמאלית של המלבן לבין גרף הפונקציה $f(x)$ והצירים.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=(9-n)\cdot f(x)$ (n טבעי) שהגרף שלה חותך את ציר ה-y מעל ראשית הצירים.

1. מצא את טווח ערכי n האפשריים לפי הנתון.
2. כאשר היקף המלבן מינימלי, מצא את טווח הערכים האפשריים של השטח המוגבל בין הישר $x=t$ לבין גרף הפונקציה $g(x)$ והצירים.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$ בתחום: $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצא בתחום הנתון את:

1. האסימפטוטות האנכיות.
2. שיעור נקודת החיתוך עם הצירים.
3. תחומי החיוביות והשליליות.

ב. נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש פתרון אחד בתחום הנתון. היעזר בסעיפים הקודמים ומבלי לגזור את הפונקציה $f(x)$, קבע כמה נקודות קיצון יש לה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{x}{\sin^2 x}$ בתחום: $0\le x\le\pi$. הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בראשית הצירים משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה A, הנמצאת בתחום: $0\le x\le\pi$. מצא את שיעורי A.

ה. נתונה הפונקציה: $h(x)=g(-x)$ בתחום: $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$. הנקודה A היא קדקוד במעוין שאלכסוניו נחתכים בראשית הצירים. אחד מקדקודי המעוין נמצא בנקודת ההשקה של אלכסון המעוין לגרף הפונקציה $h(x)$ ברביע השני. מבלי לגזור את הפונקציה $h(x)$ קבע האם יתכן שמעוין זה הוא ריבוע. אם כן, חשב את היקפו. אם לא, הסבר מדוע.

תשובות:

1) א. מהירות הנשר 2 קמ"ש, מהירות החסידה 4 קמ"ש. **ב. 1.** 05:30 בבוקר. **2.** שלוש שעות.

2) א. i. נכונה. **ii.** נכונה. **ב.** i. **ג.** $S=-162$, $d=-3$.

3) א. ההסתברות להוציא פלפל ירוק $(\frac{43}{72})$ גבוהה מההסתברות להוציא פלפל צהוב $(\frac{29}{72})$. **ב.** 0.378. **ג.** iii.

4) ד. i. נכונה. **ii.** שגויה.

5) א. $8\cos\alpha$. **ב. 1.** $\alpha=41.41^\circ$. **2.** $4.37m$.

6) א. עלייה: $1<x<4$; ירידה: $x>4$ או $0<x<1$. **ב.** אין אסימפטוטה אופקית. **ג.** גרף I.

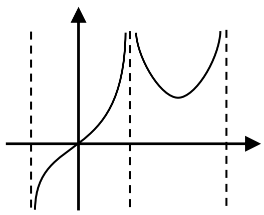
ד. 1. $\max(2,4)$, $\min(-2,-12)$. **2.** $y=-8$. **3.** שלושה. **ה. 1.** כל x. **2.** $y=\sqrt{8}$.

3. $\min(4,0)$, $\max(2,2)$, $\min(1,0)$, $\max(-2,\sqrt{12})$.

7) א. $x=5$, $y=0$. **ב. 1.** $-t+10$. **2.** $t=3$. **ג.** 2.4 יח"ר. **ד. 1.** $1\le n\le 8$. **2.** 19.2 יח"ר $\ge S \ge$ 2.4 יח"ר.

8) א. 1. $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$. **2.** $(0,0)$. **3.** חיוביות: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$; שליליות: $-\frac{\pi}{2}<x<0$.

ב. נקודת מינימום אחת. **ג.**



ד. $A(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

ה. יתכן שהמעוין הוא ריבוע. אם הוא ריבוע היקפו 4π יח'.

