

מתכונת מספר 9 – 806

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן 50 דקות).

פרק ראשון - יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3.

1. בשעה 8^{00} יצא יוסי במכוניתו מרמת ישי לאולפני "נולד לשיר". שעה לאחר מכן, יצאה דגנית על קטנוע מאולפני "נולד לשיר" לעבר רמת ישי על מנת להודיע ליוסי שעקב טעות מצערת הוא לא עבר שלב בתחרות. יוסי ודגנית חלפו אחד על פני השני בשעה 10^{00} והמשיכו כל אחד לדרכו שלו. ידוע כי דגנית הגיעה לרמת ישי 10 דקות לפני שיוסי הגיע לאולפני "נולד לשיר". (מהירויות הנסיעה קבועות לאורך כל הנסיעה).

א. מצא את היחס בין המהירויות של יוסי ודגנית

ב. באיזה שעה הגיע יוסי לאולפנים של "נולד לשיר"?

ג. ידוע כי סכום המהירויות של הקטנוע והמכונית הוא 150 קמ"ש.

מצא באיזה מרחק מרמת ישי חלפו דגנית ויוסי אחד על פני השני.

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_n = 2n - 4 + T_n$.

כאשר $T_n = 3n + (3n + 2) + (3n + 4) + \dots + 5n$.

א. הצג סדרה זו על ידי תבנית לפי מקום (כלומר, מצא נוסחה ל- a_n כפונקציה של n בלבד).

ב. מצא כמה איברים חיוביים קטנים מ-500 יש בסדרה הנתונה.

3. ילד טועם שני סוגים של שוקולד. ההסתברות שיאהב את הסוג הראשון, אם ידוע שאהב את הסוג השני,

היא $\frac{5}{6}$. ההסתברות שהוא לא יאהב את הסוג השני, אם נתון שהוא אהב את הסוג הראשון, היא $\frac{3}{8}$.

א. מצא פי כמה גדולה ההסתברות שהוא יאהב את השוקולד מהסוג הראשון מההסתברות שהוא יאהב את השוקולד מהסוג השני.

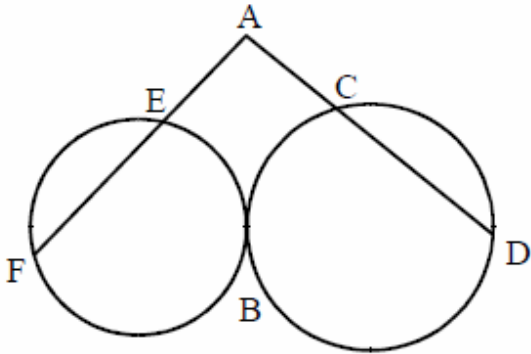
ב. ידוע כי ההסתברות שהילד לא יאהב את השוקולד השני גדולה פי 2 מההסתברות שהוא לא יאהב את הראשון.

מצא מהי ההסתברות שהילד יאהב לפחות אחד משני סוגי השוקולד.

ג. ילד נוסף טועם את שני סוגי השוקולד, וידוע שההסתברויות שהוא יאהב כל סוג זהות לאלה של הילד

הראשון. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם יאהב לפחות אחד משני סוגי השוקולד?

פרק שני - יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 4-6.



4. שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה B.

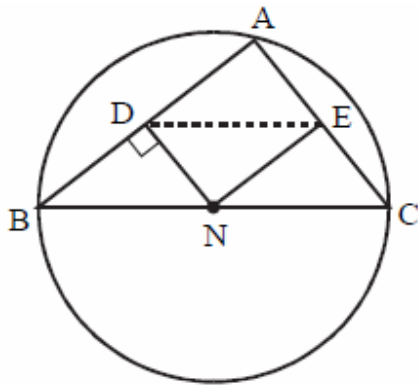
נקודה A נמצאת מחוץ לשני המעגלים, על המשך המשיק המשותף.

ACD ו-AEF הם חותכים למעגלים.

א. הוכח: $AE \cdot AF = AC \cdot AD$

ב. הוכח: המרובע DCEF בר חסימה במעגל.

ג. הוכח $\frac{S_{DCEF}}{S_{\triangle AEC}} = \frac{AD^2 - AE^2}{AE^2}$



5. BC הוא קוטר במעגל שמרכזו N.

A היא נקודה על מעגל זה. נתון כי ND

הוא אנך ל-AB, ו-DE מקביל לקוטר BC

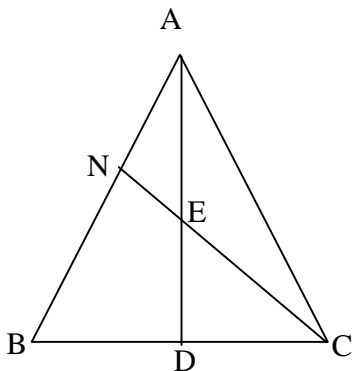
א. הוכח כי $NE \perp AC$

ב. רדיוס המעגל הוא 16 ס"מ.

נקודה G היא אמצע BN.

מצא את האורך של הקטע DG. נמק

ג. נתון $AE = 10 \text{ cm}$. מצא את DB.



6. ABC משולש שווה שוקים ($AB = AC$). $\angle NCB = \beta$.

נתון: $\angle B = \alpha$, $BC = 2b$, גובה לבסיס AD.

CN מחלק את AD, כך ש- $AE : ED = 2 : 3$.

א. חשב את היחס $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$.

ב. הבע באמצעות α , β ו-b את שטח המשולש ANC.

פרק שלישי - יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 7-9.

7. נתונה הפרבולה: $f(x) = x^2 - 14x + 45$, ומשיק לפרבולה שמשוואתו $y = 4x - 36$. בנקודה על גרף הפרבולה בה $x = a$ מעבירים משיק נוסף לפרבולה. שני המשיקים נחתכים בנקודה A. א. הבע את שיעורי הנקודה A באמצעות a.
 ב. נסמן ב-d את אורך הקטע המחבר את נקודה A עם קודקוד הפרבולה. מצא את d^2 הקטן ביותר.
 ג. שרטט באותה מערכת צירים את הפרבולה והמשיקים, עבור d^2 שחישבת בסעיף ב'.
 ד. חשב את השטח המוגבל על ידי הפרבולה ו-2 המשיקים עבור d^2 שחישבת בסעיף ב'..

8. נתונות הפונקציות: $f(x) = \sin^3 x - 3 \sin x$, $g(x) = 2 \sin^2 x - 4 \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.
 א. מצא את נקודות החיתוך בין הגרפים של 2 הפונקציות.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם הצירים.
 ג. מצא את נקודות הקיצון של כל פונקציה וקבע את סוגן.
 ד. שרטט סקיצה של גרפי הפונקציות על אותה מערכת צירים.

ה. העבירו לגרף הפונקציה $g(x)$ משיקים בנקודות החיתוך שלו עם ציר ה-x. המשיקים חותכים זה את זה בנקודה A, ואת המשיק המשותף לגרפי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות B ו-C.
 חשב את $S_{\Delta ABC}$.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{a - x^2}$, $a > 0$.
 ידוע כי תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $-1 \leq x \leq 1$.
 א. מצא את a.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה, והוכח שהיא פונקציה זוגית.

ה. חשב את השטח המוגבל בגרף הפונקציה $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ וציר ה-x בתחום $0 \leq x \leq 0.5$.

ו. חשב את ערך האינטגרל $\int_{-0.5}^{0.5} \frac{x^3 + x}{f(x)} dx$. אין צורך לחשב.

בהצלחה !

1. v_1 - מהירות הנסיעה של יוסי v_2 - מהירות הנסיעה של דגנית x - הדרך מרמת ישי לאולפנים.

א. $2v_1 + 1v_2 = x$ - המרחק הכולל ששניהם עבור עד לפגישה הוא x .

$$(1) \quad \frac{x}{v_1} - \frac{x}{v_2} = \frac{7}{6}$$

הפרש בין זמני הנסיעה של דגנית מרגע היציאה עד הרגע שכל אחד הגיע ליעדו.

יש למצוא את $\frac{x}{v_1}$. נמצא קודם כל את היחס בין המהירויות של יוסי ודגנית - $\frac{2v_1 + v_2}{v_1} - \frac{2v_1 + v_2}{v_2} = \frac{7}{6}$

$$2 + \frac{v_2}{v_1} - 1 - \frac{2v_1}{v_2} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{v_2}{v_1} - 2 \frac{v_1}{v_2}$$

נגדיר את $p = \frac{v_1}{v_2}$ ונקבל $12p^2 + p - 6 = 0 \Rightarrow 2p - \frac{1}{p} + \frac{1}{6} = 0$. מפתרון המשוואה מתקבל $p = \frac{2}{3}$

$$\frac{x}{v_1} - \frac{2x}{3v_1} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{x}{v_1} = 3.5h \text{ ונקבל (1) נציב למשוואה } \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow v_2 = 1.5v_1$$

ב. כלומר, $v_2 = 1.5v_1$. נציב למשוואה (1) ונקבל $\frac{x}{v_1} = 3.5h$

יוסי הגיע לאולפני "נולד לשיר" בשעה 11³⁰, שלוש וחצי שעות לאחר יציאתו מרמת ישי.

ג. נתון: $v_1 + v_2 = 150$, בנוסף קיבלנו בסעיף א' ש- $v_2 = 1.5v_1$. מכאן מתקבל ש- $v_1 = 60 \text{ km/h}$.

המרחק שיוסי עובר עד שהם חולפים אחד על פני השני הוא $v_1 \cdot 2 = 120 \text{ km}$.

יוסי ודגנית חלפו אחד על פני השני במרחק של 120 ק"מ מרמת ישי.

2. א. T_n היא סדרה חשבונית: $a_1 = 3n$, $a_k = 5n$, $d = 3n + 2 - 3n = 2$.

נמצא את מספר האיברים בסדרה (k): $a_k = a_1 + (k-1)d \Rightarrow 5n = 3n + (k-1)2 \Rightarrow k = n+1$.

$$S_k = (a_1 + a_k) \frac{k}{2} = (3n + 5n) \frac{n+1}{2} = 4n^2 + 4n = T_n : T_n \text{ הסדרה של הסכום של הסדרה}$$

מכאן מתקבל ש- $a_n = 2n - 4 + 4n^2 + 4n = 4n^2 + 6n - 4$

$$a_n = 4n^2 + 6n - 4 < 500 \Rightarrow 4n^2 + 6n - 504 < 0 \Rightarrow 10.5 > n > -12 \Rightarrow 1 \leq n \leq 10$$

כלומר בסדרה יש 10 איברים שקטנים מ- 500.

3.



A – אהב את הסוג הראשון. B – אהב את הסוג השני.

$$P(A/B) = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{5/8 \cdot x}{x \cdot 5/8 + (1-x)y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x}{x \cdot 5/8 + (1-x)y} = \frac{4}{3} \quad \text{א.}$$

$$P(\bar{B}) = 2P(\bar{A}) \Rightarrow 1 - P(B) = 2(1 - P(A)) \Rightarrow 2P(A) - 1 = P(B) \quad \text{ב.}$$

$$P(B) = \frac{3}{5}, P(A) = \frac{4}{5} \quad \text{מסעיף א' קבלנו ש-} \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{4}{3} \quad \text{ומפתרון המשוואות מתקבל}$$

$$P(B) = \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{5} y \Rightarrow y = 0.5, P(A) = x = \frac{4}{5} \quad \text{נחזור כעת לעץ ונמצא את } x \text{ ו- } y$$

$$P = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0.9 \quad \text{נשתמש במאורע משלים לכן}$$

יש לשים לב שהמאורעות תלויים אחד בשני, כלומר $P(B) \cdot P(A) \neq P(A \cap B)$.

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{2}{0} 0.9^0 0.1^2 = 0.99 \quad \text{ג. נשתמש בברנולי ובמאורע משלים:}$$

4. א. AB משיק משותף לשני המעגלים (נתון – B נקודת השקה משותפת לשני המעגלים).

אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק – אותו משפט עבור המעגל השני).

$$AE \cdot AF = AC \cdot AD \quad \text{מכאן מתקבל ש-}$$

ב. נראה שמשולשים AEC ו-ADF הם משולשים דומים: $\sphericalangle A$ (זווית משותפת)

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AF} \quad \text{כלומר } \Delta AEC \sim \Delta ADF \quad \text{לפי צ.ז.צ.}$$

$$\sphericalangle AEC = \sphericalangle CDF = \alpha \quad \text{(במשולשים דומים הזוויות שוות בהתאמה).}$$

$$\sphericalangle FEC = 180 - \alpha \quad \text{(זווית צמודה לזווית AEC).}$$

כלומר התקבל ש- $\sphericalangle FEC + \sphericalangle CDF = 180$ לכן מרובע ECDF הוא בר חסימה (מרובע שבו זוג זוויות נגדיות שווה ל-180 הוא בר חסימה).

$$\text{במשולשים דומים יחס הצלעות בריבוע שווה ליחס השטחים.} \quad \frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AEC}} = \left(\frac{AD}{AE} \right)^2 \quad \text{ג.}$$

$$\frac{S_{ECDF} + S_{\Delta AEC}}{S_{\Delta AEC}} = 1 - \frac{S_{ECDF}}{S_{\Delta AEC}} = \left(\frac{AD}{AE} \right)^2 \Rightarrow \frac{AD^2 - AE^2}{AE^2} = \frac{S_{ECDF}}{S_{\Delta AEC}} \quad \text{ע"י חיבור שטחים נקבל}$$

5. א. ND אנך ל- AB לכן $BD = DA$ (אנך שיוצא ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר).
 בנוסף $DE \parallel BC$ (נתון) ומכאן ש- DE קטע אמצעיים במשולש ABC (קטע שחוצה את הצלע שהוא יוצר ממנה ומקביל לבסיס המשולש הוא קטע אמצעיים).

$$AE = EC \text{ (קטע אמצעיים חוצה את הצלע הוא מגיע אליה).}$$

NE קטע שיוצא ממרכז המעגל וחוצה את המיתר AC לכן הוא גם מאונך ל- AC (קו היוצא ממרכז המעגל וחוצה את המיתר גם מאונך לו).

ב. DG הוא תיכון ליתר BN (נתון G אמצע BN).

$$DG = \frac{1}{2} BN = 8 \text{ cm} \text{ (תיכון ליתר שווה למצית מהיתר).}$$

ג. DN קטע אמצעיים במשולש ABC (קו חוצה את הצלע BC – N מרכז המעגל, וחוצה את הצלע AB הוא קטע אמצעיים).

$$DN = \frac{1}{2} AC = AE = 10 \text{ cm} \text{ (קטע אמצעיים שווה למחצית מהצלע השלישית שאליה הוא מקביל).}$$

$$\text{לפי משפט פיתגורס במשולש DNB מתקבל - } BD = \sqrt{16^2 - 10^2} = 12.49 \text{ cm}$$

$$6. \text{ א. } AE = 2x, ED = 3x \text{ לפי הנתון } AE : ED = 2 : 3$$

נתון ש- AD גובה לבסיס במשולש שווה שוקים לכן AD הוא גם תיכון ל- BC (במשולש שווה שוקים הגובה לבסיס מתלכד עם התיכון). לכן $BD = DC = b$

$$\text{נסתכל ב- } \triangle ADB : AD = 5x = b \tan \alpha \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \tan \alpha$$

$$\text{נסתכל ב- } \triangle EDC : ED = 3x = b \tan \beta \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \tan \beta$$

$$\frac{5x}{3x} = \frac{b \tan \alpha}{b \tan \beta} \Rightarrow \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{5}{3} \text{ נחלק את המשוואות ונקבל}$$

ב. נמצא את הזוויות ב- $\triangle ANC : \angle B = \angle C = \alpha$ (במשולש שווה שוקים זוויות הבסיס שוות).

$$\angle A = 180 - 2\alpha \text{ (סכום זוויות במשולש ABC שווה ל- 180 מעלות).}$$

$$\angle ANC = \beta + \alpha \text{ (זווית חיצונית למשולש NBC שווה לזוג הזוויות שלא צמודות לה).}$$

$$\angle ACN = \alpha - \beta \text{ (חיסור זוויות או סכום זוויות ב- ANC שווה ל- 180 מעלות).}$$

$$\text{נסתכל ב- } \triangle ADC \text{ ומצא את הצלע AC : } \frac{DC}{AC} = \cos \alpha \Rightarrow AC = \frac{b}{\cos \alpha}$$

$$\frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AN}{\sin(\alpha - \beta)} \Rightarrow AN = \frac{b \sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin(\alpha + \beta)} : \text{ANC במשולש}$$

$$S_{ANC} = \frac{AN \cdot AC \sin(180 - 2\alpha)}{2} = \frac{b^2 \sin(\alpha - \beta) \sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha \sin(\alpha + \beta)} = \frac{b^2 \sin(\alpha - \beta) 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha \sin(\alpha + \beta)} = \frac{b^2 \sin(\alpha - \beta) \sin \alpha}{\cos \alpha \sin(\alpha + \beta)}$$

7.א. נמצא את המשיק השני: נק' ההשקה - $(a, a^2 - 14a + 45)$. שיפוע - $m = f'(a) = 2a - 14$.

$$. y_2 - a^2 + 14a - 45 = (2a - 14)(x - a) \Rightarrow y_2 = (2a - 14)x + 45 - a^2$$

$$(2a - 14)x + 45 - a^2 = 4x - 36 \Rightarrow x = \frac{(a - 9)(a + 9)}{2(a - 9)} = \frac{a + 9}{2}$$

$$. \left(\frac{a + 9}{2}, 2a - 18 \right) : A$$

$$. x_B = \frac{-b}{2a} = 7 \Rightarrow y_B = -4 : (B)$$

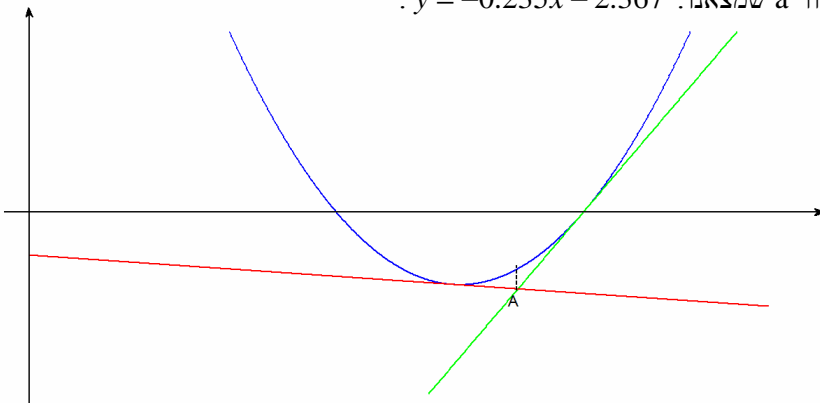
$$. d^2 = \left(\frac{a + 9}{2} - 7 \right)^2 + (2a - 18 + 4)^2 = \left(\frac{a - 5}{2} \right)^2 + (2a - 14)^2$$

$$. d'^2 = 0.5a - 2.5 + 8a - 56 = 0 \Rightarrow a = 6 \frac{15}{17}$$

$$. d'' = 8.5 > \Rightarrow \min$$

$$. d^2 = \frac{16}{17}$$

$$. y = -0.235x - 2.367$$



$$7. נמצא את שיפוע ה- x של נקודת ההשקה של המשיק הראשון: $m = f'(x) = 2x - 14 = 4 \Rightarrow x = 9$$$

$$S = \int_a^{\frac{a+9}{2}} (f(x) - y_2(x)) dx + \int_{\frac{a+9}{2}}^9 (f(x) - y) dx = (0.1175x^2 + 2.367x) \Big|_{6.88}^{7.94} + \left(\frac{x^3}{3} - 7x^2 + 45x \right) \Big|_{6.88}^9 + (36x - 2x^2) \Big|_{7.94}^9$$

. $S = 0.79$ לאחר הצבה של כל המספרים מתקבל

8. $2 \sin^2 x - 4 \sin x = \sin^3 x - 3 \sin x \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 2 \sin x + 1) = 0$

נגדיר $\sin x = t$ ונקבל $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$. כלומר $x = \pi/2$

בנוסף $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi$. נקודות החיתוך בין הגרפים $(0,0), (\pi/2, -2), (\pi, 0)$

ב. $f(x) = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 3) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi$, $f(0) = g(0) = 0$

$g(x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x (\sin x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pi$

נקודות החיתוך של $f(x)$ ו- $g(x)$ עם הצירים זהות: $(0,0), (\pi, 0)$

ג. נקודות קיצון של $f(x)$: $f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 3 \cos x (\sin^2 x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2$, $\sin x = 1 \Rightarrow x = \pi/2$, $\sin x = -1 \Rightarrow out of range$

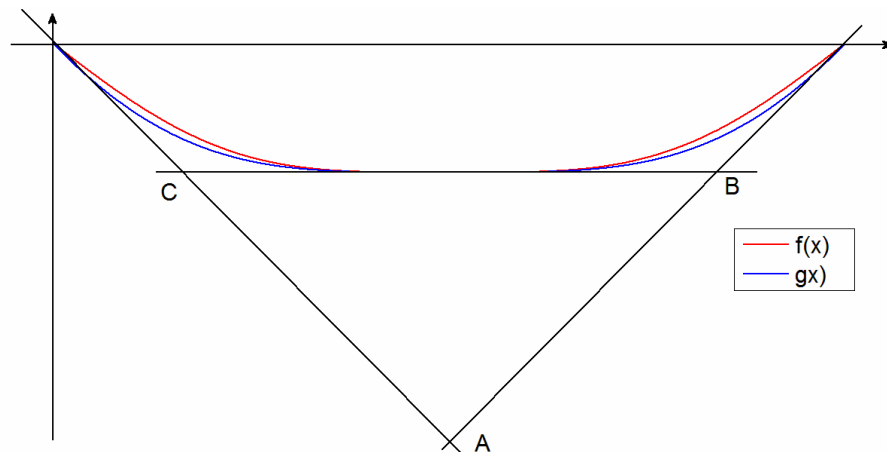
לכן נקודות הקיצון - $(\pi/2, -2)$. נוסיף גם את קצה הקטע $(0,0), (\pi, 0)$

באותו אופן מוצאים קיצון של $g(x)$: $g'(x) = 4 \sin x \cos x - 4 \cos x = 0 \Rightarrow 4 \cos x (\sin x - 1) = 0$

מתקבלת בדיוק אותה נקודה עבור הפונקציה $g(x)$.

לסיכום מתקבל $(0,0) \max$, $(\pi/2, -2) \min$, $(\pi, 0) \max$. האפיון ע"י הצבת מספרים לנגזרת הראשונה.

ד.



ה. בשרטוט של סעיף ד' משורטטים המשיקים והנקודות A, B, ו-C. נמצא את המשיקים.

$g(0) = 0, g'(0) = -4$ לכן $y_1 = -4x$. $g(\pi) = 0, g'(\pi) = 4$ לכן $y_2 = 4(x - \pi) \Rightarrow y_2 = 4x - 4\pi$

נקודות החיתוך של שני המשיקים היא $x = \pi/2$ $\Rightarrow -4x = 4x - 4\pi \Rightarrow x = \pi/2$. נקודה A: $(\pi/2, -2\pi)$.

המשיק המשותף עובר דרך נקודת המינימום של הפונקציות לכן $y_3 = -2$.

נמצא את שיעור ה-x נקודת B ו-C: $4x - 4\pi = -2 \Rightarrow x = \pi - 0.5$ ו- $-4x = -2 \Rightarrow x = 0.5$.

המרחק BC הוא $\pi - 1$. הגובה לצלע BC הוא $h = |y_A - y_B| = 2\pi - 2$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{2(\pi - 1)(\pi - 1)}{2} = (\pi - 1)^2$$

הוא המשולש הוא $(\pi - 1)^2$.

9. א. תחום הגדרה - $a - x^2 \geq 0$ לפי תחום ההגדרה שנתון לנו ברור ש- $a = 1$. מאפס את הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

שמתחת לשורש. מכאן ש-

ב. $(0, 1) \Rightarrow x = 0$. כאשר ניצב $y = 0$ נקבל $(-1, 0), (1, 0)$.

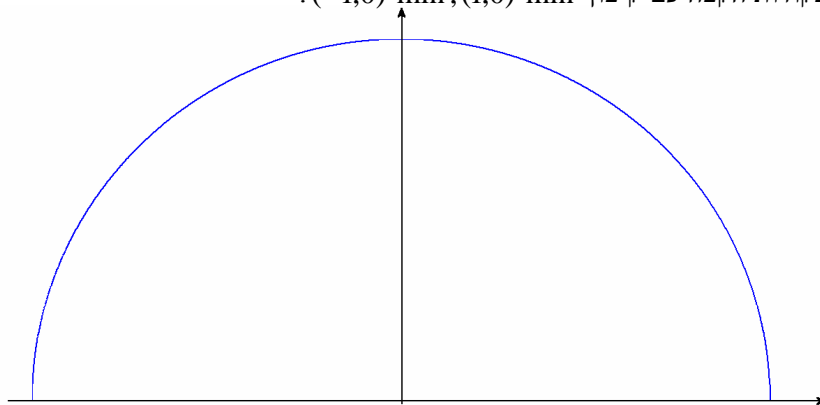
$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{\text{positive}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

ג. נמצא קיצון:

אפיון נקודת קיצון: $f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \max$ נק' הקיצון היא $\max(0, 1)$.

כמובן שגם נקודות הקצה עם קיצון $\min(1, 0), \min(-1, 0)$.

ד.



לפי השרטוט ניתן לראות שהפונקציה $f(x)$ זוגית. בנוסף: $f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = f(x)$.

ה. $S = \int_0^{0.5} g(x) = -f(x)|_0^{0.5} = 0.134$. ניתן לזהות יש שאינטגרל של $g(x)$ שווה ל- $f(x)$ או

להשתמש בשיטת ההצבה. חשוב גם לשים לב שבתחום הנתון $g(x)$ היא פונקציה חיובית.

ו. ערך האינטגרל יהיה 0, מכיוון שהפונקציה היא אי זוגית ותחום האינטגרל הוא סימטרי.

$$-\frac{(-x)^3 + (-x)}{f(-x)} = -\frac{x^3 + x}{f(x)}$$

כלומר הפונקציה שבתוך האינטגרל היא אי זוגית.