

המתכונת שלפניכם הורכבה משאלות מעניינות ומעוררות מחשבה שנבחרו מספר ארכימדס בשאלון 581. ל-8 השאלות יש פתרונות מוסרטים מלאים חינם באתר 'מתמטיקורס' בקישור: <https://bit.ly/3oQKUg2>

## שאלון 581 - מתכונת 2 מותאמת למיקוד החורף 2021

במבחן שלפניך 8 שאלות. בחר 5 שאלות מהן וענה עליהן (לכל שאלה 20 נק'')

### פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. אוטובוס ומשאית יצאו בשעה 9:00 מהנקודות A ו-B בהתאמה, זה לקראת זו. מהירות האוטובוס  $2v$  ומהירות המשאית  $3v$ . הם נפגשים לראשונה



בנקודה C וממנה האוטובוס ממשיך לנקודה B והמשאית ממשיכה לנקודה A. כאשר כל רכב מגיע ליעדו, הוא מסתובב וחוזר לנקודה ממנה יצא. השניים נפגשים שנית בנקודה D.

א. חשב את היחס בין אורכי הקטעים  $\frac{AC}{BD}$ .

ב. נתון שבין שתי הפגישות חלפו 36 דקות. מצא באיזו שעה הגיע כל רכב בחזרה לנקודת מוצאו.

ג. בזמן שחלף מאז פגישתם בנקודה C ועד הגעת האוטובוס לנקודה B, המרחק המקסימלי בין שני הרכבים היה 40 ק"מ. חשב את אורך הקטע AB.

2. סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  נתון בנוסחה:  $S_n = 3p \cdot 2^{n+1} - 6p$ .

א. הוכח שהסדרה  $a_n$  היא הנדסית והבע באמצעות  $n$  ו- $p$  את האיבר הכללי  $a_n$ .

ב. נתונה סדרה הנדסית נוספת שבה האיבר הכללי הוא  $b_n = p \cdot 3^n$ .

הגדירו סדרה חדשה:  $C_n = 2^n \cdot b_n - 3^n \cdot a_n$ .

1. קבע האם הסדרה  $C_n$  היא הנדסית או שאינה הנדסית.

2.  $S_k$  הוא סכום  $k$  האיברים הראשונים בסדרה  $C_n$ . הבע את  $S_k$  באמצעות  $p$  ו- $k$ .

3. עבור כל טענה קבע האם היא נכונה או שגויה. נמק את תשובתך.

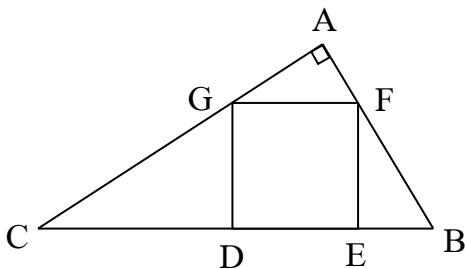
i. אם  $0 < S_k$  אז  $a_{n+1} < a_n$ .

ii. יתכן שקיים מספר שהוא איבר בסדרה  $a_n$  וגם איבר בסדרה  $b_n$ .

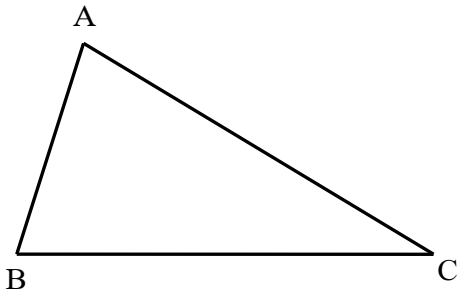
3. צוות רפואי אוסף כלבים וחתולים ובודק אם הם בריאים או חולים. מחצית מהנבדקים נמצאו בריאים. נסמן ב- $p$  את ההסתברות לבחור מבין כלל הנבדקים חתול שנמצא בריא. ההסתברות לבחור כלב מבין כלל הנבדקים שווה להסתברות לבחור מבין כלל הנבדקים חתול בריא או בעל חיים חולה כלשהו.
- א. לפניך 4 טענות. קבע איזו מהטענות הבאות היא נכונה ונמק:
- יתכן שמספר החתולים שנבדקו גדול ממספר הכלבים שנמצאו בריאים.
  - יתכן ש:  $p=0.2$ .
  - יתכן שההסתברות לבחור כלב בריא מבין כלל הכלבים היא:  $\frac{1}{9}$ .
  - יתכן שסך הכל נבדקו 65 בעלי חיים.
- ב. עדי בוחר באקראי בעל חיים שנבדק, מלטף אותו ומחזיר אותו לאחריים. הוא מבצע את התהליך 4 פעמים. יתכן שליטף את אותו בעל חיים מספר פעמים. ההסתברות שמחצית מבעלי החיים שליטף הם כלבים היא 0.3456. מה ההסתברות לבחור חתול חולה מבין כלל החתולים שנבדקו?
- ג. מיכל בוחרת באקראי חתול שנבדק, מלטפת ומחזירה אותו לאחריים. היא מבצעת את התהליך 4 פעמים. ידוע שרק חלק מהחתולים שליטפה בריאים. חשב את ההסתברות שרובם בריאים.

**פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור**

4. במשולש  $\triangle ABC$  ישר הזווית כלוא הריבוע  $DEFG$  כמתואר בשרטוט.



- הוכח:  $FG^2 = CD \cdot BE$ .
- שטח הריבוע  $DEFG$  הוא 144 סמ"ר.
- שטח המשולש  $\triangle CDF$  גדול פי  $\frac{16}{9}$  משטח המשולש  $\triangle BEG$ .
- חשב את היקף הטרפז  $BCGF$ .
- עבור הטרפז  $BCGF$  קבע האם ניתן:
  - לחסום אותו במעגל. נמק.
  - לחסום מעגל בתוכו. נמק.



5. במשולש  $\triangle ABC$  נתון:  $AC = 2m$ ,  $AB = m$ . נסמן:  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .
- הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את אורך הצלע  $BC$ .
  - קבע האם יתכן שהיקף המשולש  $\triangle ABC$  יהיה קטן מ- $4m$ . נמק את תשובתך.
  - הבע באמצעות  $\alpha$  את ערכו של  $\cos \beta$ .
  - נתון:  $\cos \beta = 0.25$ . מבלי למצוא את הזווית  $\alpha$  ו- $\beta$ , הבע באמצעות  $m$  את שטח המשולש  $\triangle ABC$ .

**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות שורש, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 \cdot \cos x$  בתחום:  $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$ .

- א. קבע האם הפונקציה  $f(x)$  זוגית, אי זוגית או שאינה זוגית ואינה אי זוגית.
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים בתחום:  $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$ .
- ג. הסבר מדוע הפונקציה  $f(x)$  היא אי שלילית בתחום הנתון.

ד. הראה שחלק מהנקודות על גרף הפונקציה  $f(x)$  שעבורן  $f'(x) = 0$  מקיימות:  $\tan x = \frac{2}{x}$ .

ה. נתונים הגרפים של הפונקציות:  $g(x) = \frac{2}{x}$  ו:  $h(x) = \tan x$  בתחום:  $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$ .

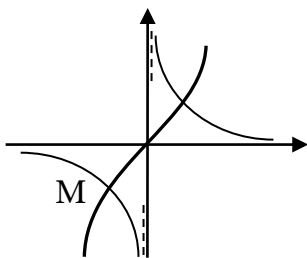
קבע כמה פתרונות בתחום:  $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$  יש למשוואה  $f'(x) = 0$ .

ו. הגרפים של הפונקציות  $g(x)$  ו- $h(x)$  נחתכים, בין היתר, בנקודה M ששיעור ה-y שלה הוא -1.858.

ענה על הסעיפים הבאים עבור התחום:  $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$ .

1. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה  $f(x)$ .

2. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.



7. הנקודות B ו-E נמצאות בהתאמה על הצלעות AC ו-AD במשולש  $\Delta ACD$ . נסמן:  $BC = x$ ,

$\angle CAD = \alpha$ . נתון:  $AE = 2BC$ ,  $DE = AB = 3BC$ . שטח המרובע BCDE הוא 35 סמ"ר.

א. הבע באמצעות x את  $\sin \alpha$ .

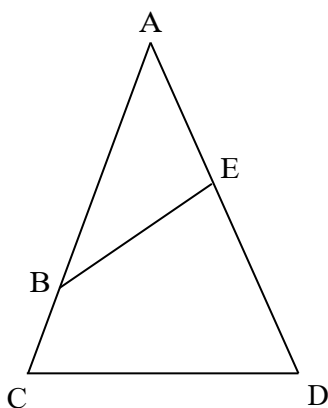
ב. נתון: הזווית  $\alpha$  היא חדה. הוכח:  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{x^4 - 25}}{x^2}$ .

ג. הבע באמצעות x את ערך הביטוי  $BE^2$ .

ד. מצא עבור איזה ערך של x יהיה ערך הביטוי  $BE^2$  מינימלי.

ה. נתון שכאשר הביטוי  $BE^2$  מינימלי גם אורך הקטע BE מינימלי.

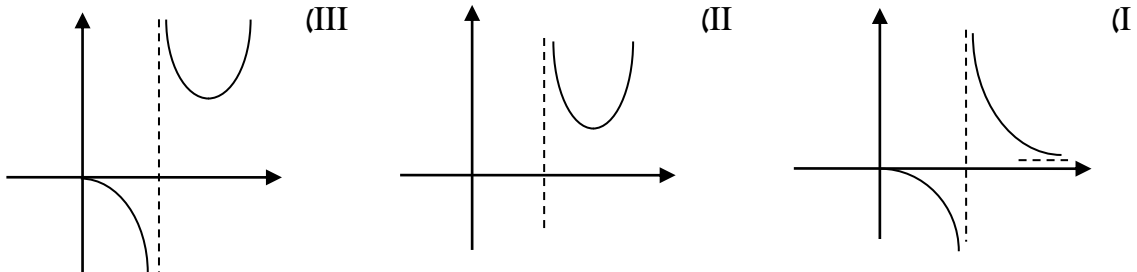
מצא את הערך המינימלי של הקטע BE.



8. נתונות פונקציה 1:  $y = \frac{x+1}{\sqrt{2x-2}}$ , פונקציה 2:  $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ , פונקציה 3:  $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.

ב. נתונות הסקיצות של שלוש הפונקציות. קבע איזה גרף מתאים לכל אחת מהפונקציות:



ג. הגדירו את הפונקציות:  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x-2}} + a$ ,  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ ,  $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} + b$ .

כאשר משרטטים את הסקיצות של שלוש הפונקציות על אותה מערכת צירים, הישר  $y = k$  עובר

דרך נקודות קיצון של שלוש הפונקציות. מצא את  $a$  ואת  $b$  (הבחן בין שני מקרים).

ד. בסעיף ד' בחר בערכי  $a$  ו- $b$  הגבוהים יותר מבין אלו שמצאת.

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או שגויה. נמק את תשובתך.

i. למשוואה  $g(x) = k + 1$  יש יותר פתרונות מהמשוואה  $h(x) = 2k$ .

ii. בהכרח מתקיים:  $8 < \int_2^4 h(x) dx$ .

**בהצלחה!**

(התשובות בעמוד הבא)

למבצעי הנחות בהזמנות מרוכזות של ספרי ארכימדס לבית הספר בקישור: <https://bit.ly/3nthuVc>

לשאלות נוספות בשאלון 581 באתר הוצאת ארכימדס: <https://bit.ly/359PZb6>



סרטוני פתרונות מלאים לכל השאלות בספר נמצאים באתר 'מתמטיקורס' בקישור <https://matematiccourse.com/> או בסריקת הקוד המצורף משמאל:

**תלמידים, מעוניינים להצטרף לרשימת התפוצה של ארכימדס לתלמידי תיכון (4 ו-5 יח"ל)?**  
כנסו לקישור: <https://bit.ly/2GkDX6s> ומלאו את הפרטים!

**מורים, מעוניינים להצטרף לרשימת התפוצה של ארכימדס** למורי תיכון ולקבל חומרי לימוד ושאלות להעמקה? כנסו לקישור: <https://bit.ly/3a6kt1S> ומלאו את טופס ההצטרפות בתחתית עמוד הכניסה.

**תשובות:**

1 א. 2. ב. האוטובוס ב- 10:30, המשאית ב- 10:00. ג. 60 ק"מ.

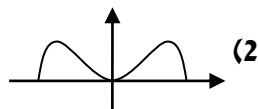
2 א.  $a_n = 3p \cdot 2^n$  או  $a_n = 6p \cdot 2^{n-1}$ . ב. 1 הנדסית. 2  $S_k = -\frac{12p \cdot (6^k - 1)}{5}$ . 3 i נכונה. ii שגויה.

3 א. טענה ii. ב. 0.75. ג. 0.069.

4 ב. 84 ס"מ. ג. 1 לא. 2 לא.

5 א.  $BC = m \cdot \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$ . ב. לא יתכן. ג.  $\frac{1 - 2 \cos \alpha}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}$ . ד.  $\frac{\sqrt{15} \cdot m^2}{4}$ .

6 א. א. זוגית. ב.  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ . ה. שלושה. ו. 1  $x = -1.076$ ,  $x = 1.076$ ,  $x = 0$ .



7 א.  $\sin \alpha = \frac{5}{x^2}$ . ג.  $BE^2 = 13x^2 - 12\sqrt{x^4 - 25}$ . ד.  $x = \sqrt{13}$ . ה. 5 ס"מ.

8 א. פונקציה 1:  $x > 1$ ; פונקציה 2:  $1 < x$  או  $0 \leq x < 1$ ; פונקציה 3:  $1 < x$  או  $0 \leq x < 1$ .

ב. גרף I: פונקציה 3; גרף II: פונקציה 1; גרף III: פונקציה 2.

ג. עבור  $k = 0$ :  $a = -2$ ,  $b = 0$ ; עבור  $k = 4$ :  $a = 2$ ,  $b = 4$ .

ד. i נכונה. ii נכונה.