מתכונת מתמטיקה 10 -806

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 45 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

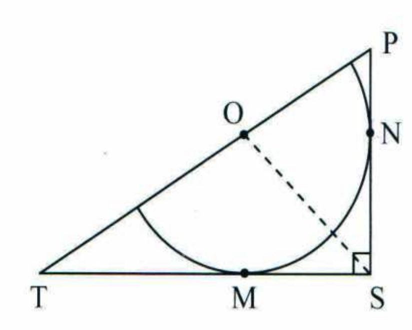
1. גלעד יצא מנקודה A ורכב על אופניו לנקודה B במהירות V ק"מ בשעה. כעבור חצי שעה יצאה מירי מנקודה A ורכבה על אופניה במהירות הגדולה ב-2 ק"מ לשעה מהמהירות בה רכב גלעד. מירי השיגה את גלעד לפני שהגיע לנקודה B והמשיכה מיד לעבר נקודה B. מירי הגיעה לנקודה B חצי שעה אחרי שהשיגה את גלעד.
   א. בטא באמצעות v את המרחק בין הנקודות A ו-B.
   ב. מצא את ערכי v עבורם המרחק בין הנקודות A ו-B קטן מ-36 ק"מ, אם ידוע שמירי רכבה לפחות במהירות של 11 ק"מ בשעה .
   ג. גלעד התעכב 20 דקות בנקודה בה נפגש עם מירי ואחר כך החל לחזור לנקודה A. מירי הגיעה לנקודה B והחלה מיד לחזור לנקודה A. מירי רכבה במהירות 11 ק"מ בשעה.
   האם השיגה מירי את גלעד לפני שהגיע לנקודה A ? נמק ע"י חישוב.

2. א. בסדרה החשבונית $20,25,30,35,40,45,...$ ישנם 200 אברים.
   כמה אברים בסדרה מתחלקים ב- 3 ללא שארית?
   ב. הוכח: אם a,b,c מהווים סדרה הנדסית, אזי שורשי המשוואה $ax^2+2bx+c=0$ שווים זה לזה.

3. ידוע כי 86% מהתיירים שוהים בארץ פחות מחודש והשאר שוהים יותר מחודש.
ידוע גם כי 80% מהתיירים השוהים בארץ פחות מחודש שוהים בבתי מלון בעוד ש-30% מאלה השוהים בארץ יותר מחודש שוהים בבתי מלון.
   א. מה ההסתברות שתייר שנבחר באופן מקרי, שהה בבית מלון?
   ב. נבחר באופן אקראי תייר ששוהה בבית מלון. מה ההסתברות שהוא שוהה בארץ יותר מחודש?
   ג. נבחרו 3 תיירים השוהים בבית מלון. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם ישהה בארץ יותר מחודש?

פרק שני – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 4-6.

4. במשולש ישר זווית PST ($\measuredangle PST = 90^0$) חסום חצי מעגל שמרכזו O נמצא על היתר PT.



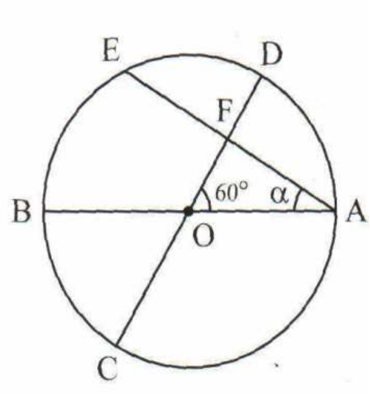
א. הוכח כי OS חוצה את הזווית $\measuredangle PST$.

ב. נתון גם כי : PS=18 ס"מ , TS=24 ס"מ.

חשב את אורכי הקטעים OP ו-OT.

ג. פי כמה גדול שטח משולש TOS משטח משולש PSO ?

5. במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני קטרים AB ו-CD הנחתכים בזווית של 60^0 .

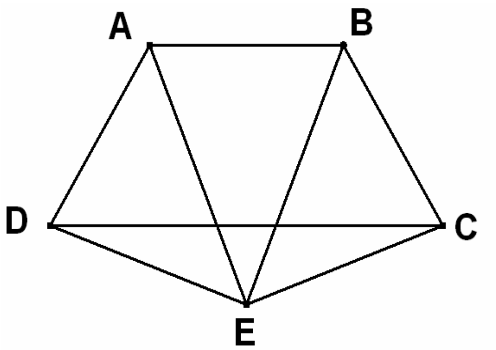


מיתר AE, היוצר זווית α עם הקוטר AB, חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו- α .

ב. שטח המשולש הוא $\frac{3}{8}\sqrt{3}R^2$. מצא את α.

6. ABCD הוא טרפז שווה שוקיים. שוקי הטרפז שוות לבסיס הקטן שלו. על הבסיס הקטן בנוי משולש שווה שוקיים ΔABE (BE=AE).



נתון: $AB = a$, $(\alpha < 90^0)$, $\measuredangle AEB = \alpha$, $\measuredangle ADC = \beta$

א. הבע באמצעות a, α ו- β את אורך הקטע DE.

נתון גם $\alpha = \beta$, AD=DE.

ב. הוכח שהמשולש ΔAEB הוא שווה צלעות.

ג. היכן נמצאת נקודה E במקרה זה ? נמק.

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 7-9.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

א. i) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה

ii) מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים

iii) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים

iv) הראה שהפונקציה עולה בעל תחום ההגדרה.

v) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה

vi) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה x=2.

vii) חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה x=2 וציר ה-Y.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{x-8}{\sqrt{(x-8)^2+5}}$

i) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$

ii) מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה x=10.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים, האם השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה x=10 והישר x=8 גדול, קטן או שווה לשטח שחישבת בסעיף א.vii. נמק.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x$ בתחום $0\le x\le\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום וקבע את סוגן.

ג. רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה בתחום.

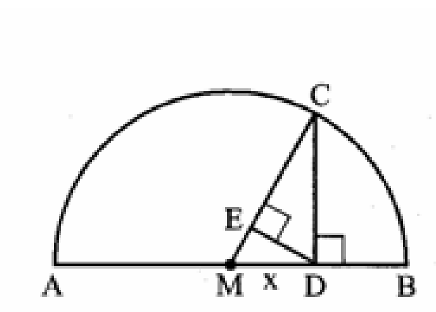
ד. הוכח כי לכל x מתקיים $0\le 8\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x\le 2$

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

9. על הקטע AB=2R , בנו חצי מעגל שמרכזו M.

מימין למרכז בחרו על הקוטר, נקודה D וממנה העלו אנך ל- AB החותך את חצי המעגל בנקודה C.

מנקודה D העבירו אנך לרדיוס MC. האנך חותך את הרדיוס בנקודהE.



א. סמן ב- x את הקטע DM.

הבע את שטח משולש CED באמצעות x.

ב. מה צריך להיות אורך הקטע MD, כדי ששטח המשולש CED יהיה מקסימלי?

בהצלחה!

1. א. t_1 - הזמן בשעות מרגע היציאה של גלעד לדרך ועד לפגישה בין מירי וגלעד

x_{AB} - המרחק בק"מ בין נקודות A ו- B.

$vt_1 = (v+2)(t_1 - 0.5)$ - עד רגע הפגישה גלעד ומירי עוברים אותו מרחק.

נבודד את הזמן מהמשוואה ונקבל $vt_1 = vt_1 + 2t_1 - 0.5v - 1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{v+2}{4}$

$(v+2)(t_1 - 0.5 + 0.5) = x_{AB}$ - המרחק מ- A ל- B שמירי עוברת.

נציב את הזמן למשוואה האחרונה ונקבל $(v+2)(t_1 - 0.5 + 0.5) = x_{AB} = \dfrac{(v+2)^2}{4}$

ב. נתון ש- $\dfrac{(v+2)^2}{4} < 36 \ \Rightarrow v+2 < 12 \Rightarrow v < 10$. בנוסף נתון ש- $v+2 \geq 11 \ \Rightarrow v \geq 9$.

כלומר תחום המהירות v בקמ"ש הוא $9 \leq v < 10$.

ג. נתון $v+2 = 11 \Rightarrow v = 9$. כעת נמצא גם את המרחק AB : $x_{AB} = \dfrac{(v+2)^2}{4} = 30.25km$

כעת נמצא את המרחק מנקודות היציאה A עד לנקודת הפגישה הראשונה - $x = vt_1 = \dfrac{v(v+2)}{4} = 24.75km$.

מכאן שהמרחק מנקודת הפגישה הראשונה ל- B היא $5.5km$

נניח שיש פגישה שנייה והיא מתרחשת במרחק d מנקודת הפגישה הראשונה לכיוון A.

t_2 - הזמן בשעות מרגע הפגישה הראשונה עד לרגע הפגישה השנייה.

$2 \cdot 5.5 + d = 11 \cdot t_2 = \dfrac{11+d}{11}$ - משואת התנועה של מירי.

$9(t_2 - \dfrac{1}{3}) = d \Rightarrow 9(\dfrac{11+d}{11} - \dfrac{1}{3}) \Rightarrow 33d = 198 + 27d \Rightarrow d = 33km$ - משואת התנועה של גלעד.

המרחק שהתקבל גדול יותר אפילו מהמרחק בין AB לכן הפגישה השנייה לא תתרחש.

2. א. נמצא את הפרש הסדרה ואת האיבר הראשון: $d = a_2 - a_1 = 5 \ , a_1 = 20$.

בנוסף נמצא את האיבר האחרון $a_n = 20 + (n-1)5 = 5n + 15 \ \Rightarrow a_{200} = 1015$

נסמן את האיברים מתוך הסדרה הנתונה שמתחלקים ב- 3 : $b_n \ : \ 30, 45, 60, ..., 990, 1005$

בסדרה החדשה שהתקבלה $b_1 = 30 \ , \ d = 15 \ , \ b_n = 1005$.

$b_n = 30 + (n-1)15 = 15n + 15 = 1005 \Rightarrow n = 66$. כלומר בסדרה המקורית יש 66 איברים שמתחלקים ב- 3.

ב. מכיוון ש- a, b, c מהווים סדרה הנדסית - $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow c = \dfrac{b^2}{a}$. נציב קשר זה למשואה הריבועית ונקבל $ax^2 + 2bx + b^2/a = 0$. מכאן פתרון המשואה הוא $\dfrac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a \cdot b^2/a}}{2a} = -\dfrac{b}{a}$. כלומר קבלנו רק שורש אחד

לכן ניתן לומר ששורשי המשוואה זהים זה לזה. (ניתן היה לפתור גם בעזרת נוסחאות ויאטה)

.3

	שוהה פחות מחודש - B	שוהה יותר מחודש - $\overline{B}$	
שוהה בבית מלון - A	0.688	0.042	0.73
שוהה לא בבית מלון - $\overline{A}$	0.172	0.098	0.27
	0.86	0.14	1

א. $P = 0.73$

ב. $P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0.042}{0.73} = \frac{21}{365} = 0.0575$

ג. בעזרת מאורע משלים וברנולי נקבל: $P = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{21}{365}\right)^0\left(\frac{344}{365}\right)^3 = 0.1628$.

4.א. נתון שחצי המעגל חסום במשולש לכן SN ו- SM הם שני משיקים למעגל שיוצאים מנקודה S.

OS – קטע שמחבר את מרכז המעגל עם הנקודה שממנה יוצאים שני המשיקים לכן OS הוא חוצה זווית S.

ב. נשתמש במשפט חוצה זווית (OS חוצה את זווית S במשולש PST) - $\frac{TS}{PS} = \frac{TO}{OP} \Rightarrow \frac{TO}{OP} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$.

בנוסף לפי פיתגורס במשולש PST מתקבל - $PS^2 + ST^2 = PT^2 \Rightarrow PT = 30cm$.

נגדיר $OT = x$ לכן לפי חיסור קטעים $PO = 30 - x$. נציב חזרה למשוואה שהתקבלה ממשפט חוצה זווית -

$\frac{4}{3} = \frac{y}{30-y} \Rightarrow y = \frac{120}{7}\,cm$. כלומר, $TO = 17.143cm$ ו - $OP = 12.857cm$.

ג. ניתן לראות (אתם צריכים להוכיח) שלשני המשולשים יש גובה משתוף לצלע PT.

לכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים - $\frac{S_{\Delta SOT}}{S_{\Delta SOP}} = \frac{TO}{OP} = \frac{4}{3}$.

5. נתון: $\measuredangle FAO = \alpha$, $\measuredangle FOA = 60^0$. $\measuredangle OFA = 120 - \alpha$ (סכום זוויות ב- ΔFOA שווה ל- 180 מעלות).

$\measuredangle DCA = 30^0$ (זווית היקפית שווה למחצית זווית מרכזית שנשענת על אותה קשת- DA).

$\measuredangle FAC = 30 + \alpha$ (סכום זוויות ב- ΔAFC שווה ל- 180 מעלות).

$\measuredangle COA = 120^0$ (זוויות צמודה ל- $\measuredangle FOA$).

לפי משפט הסינוסים ב - ΔOCA: $\frac{AC}{\sin 120} = \frac{R}{\sin 30} \Rightarrow AC = \sqrt{3}R$.

לפי משפט הסינוסים ב- ΔFAC: $\frac{AC}{\sin(120-\alpha)} = \frac{FA}{\sin 30} \Rightarrow FA = \frac{\sqrt{3}R}{2\sin(120-\alpha)}$.

שטח משולש ACF: $S_{\Delta ACF} = \frac{AC \cdot FA \sin(30+\alpha)}{2} = \frac{3R^2 \sin(30+\alpha)}{4\sin(120-\alpha)}$.

ב. $\frac{3R^2\sin(30+\alpha)}{4\sin(120-\alpha)} = \frac{3}{8}\sqrt{3}R^2 \Rightarrow \sin(30+\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(120-\alpha)$

נשתמש בנוסחא $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ ונקבל

$$\sin 30\cos\alpha + \cos 30\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 120\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 120\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\alpha = \frac{1}{4}\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^0 .$$

6. א. נתון: $AB = BC = AD = a$ (נתון + נתון ABCD טרפז שווה שוקים). $\prec AEB = \alpha$, $\prec ADC = \beta$.

נתון ש- ΔAEB משולש שווה שוקים לכן $\prec EAB = 90 - \alpha/2$ (זוויות בסיס במש"ש שוות + סכום זוויות במשולש שווה ל- 180 מעלות).

AB||DC (בסיסים בטרפז) לכן $\prec DAE = 90 + \alpha/2 - \beta$ $\prec ADC + \prec DAB = 180^0 \Rightarrow$ (זוויות חד צדדיות שוות בין ישרים מקבילים+ חיסור זוויות).

לפי משפט הסינוסים ב- ΔAEB: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{AE}{\sin(90-\alpha/2)} \Rightarrow AE = \frac{a\cos(\alpha/2)}{\sin\alpha} = \frac{a\cos\alpha/2}{2\sin\alpha/2\cos\alpha/2} = \frac{a}{2\sin\alpha/2}$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔADE:

$$DE = \sqrt{a^2 + AE^2 - 2aAE\cos(90-\beta+\alpha/2)} = a\sqrt{1 + \frac{1}{4\sin^2\alpha/2} - \frac{\sin(\beta-\alpha/2)}{\sin\alpha/2}} .$$

ב. נציב לביטוי את הנתונים ונקבל $DE = a\sqrt{1 + \frac{1}{4\sin^2\alpha/2} - \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin\alpha/2}} = \frac{a}{2\sin\alpha/2}$.

נתון AD=DE לכן $a = \frac{a}{2\sin\alpha/2} \Rightarrow \sin\alpha/2 = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^0$.

במקרה זה זוויות המשולש ABE הם 60 מעלות, כלומר משולש ABE משולש שווה צלעות.

ג. במקרה זה E חייבת להיות על DC. מתקבל שזווית CDE שווה ל- 0.

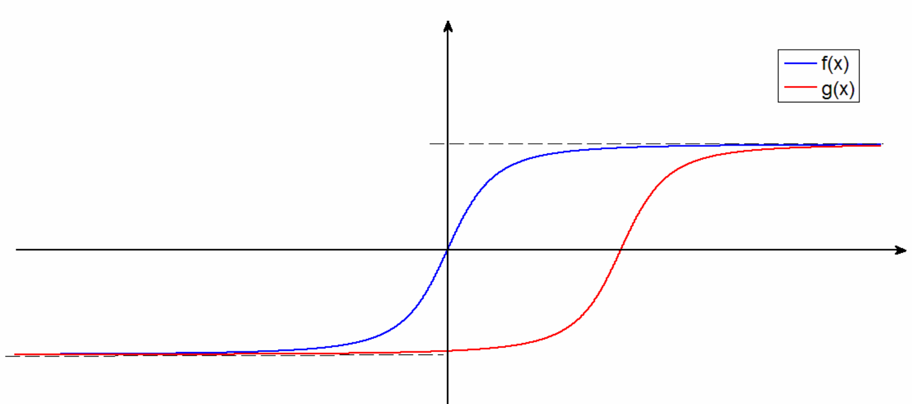
7. א. תחום הגדרה: לכל x.

אסימפטוטות אופקיות: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. אנכיות: אין.

חיתוך עם הצירים: $(0,0)$.

תחומי עליה/ ירידה: $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} = \frac{5}{(x^2+5)^{1.5}} > 0$ לכן הפונקציה עולה לכל x.

סקיצה:



משואת משיק: $f'(2) = m = \frac{5}{27}$. נקודת השקה: $(2, 2/3)$.

משואת המשיק: $y-2/3=5/27(x-2)\Rightarrow y=5/27x+8/27$.

$$S=\int_0^2\left(\frac{5}{27}x+\frac{8}{27}-\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx=\left.\frac{5}{54}x^2+\frac{8}{27}x-\sqrt{x^2+5}\right|_0^2=0.2$$

ב. ניתן לראות ש- $g(x)=f(x-8)$ (ראה שרטוט ביחד עם $f(x)$).

גם הפונקציה גם הישר המקביל לציר ה- Y וגם המשיק זזו 8 צעדים ימינה לכן השטח לא משתנה.

8. נשים לב שניתן בעזרת הנוסחא של זווית כפולה לקבל $f(x)=(2\sin x\cos x)^2=\sin^2 2x$

א. $x=0\Rightarrow(0,0)$ ו- $\sin^2 2x=0\Rightarrow 2x=\pi k\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}k$. הפתרונות בתחום: $(0,0),(\pi/2,0),(\pi,0)$.

ב. נקודות קיצון: נגזור ונשווה ל- 0 $f'(x)=4\sin 2x\cdot\cos 2x=2\sin 4x=0$ (שימוש בזהות של זווית כפולה).

$4x=\pi k\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}k\Rightarrow\ (0,0)\min\ ,(\frac{\pi}{4},1)\max\ ,(\frac{\pi}{2},0)\min\ ,(\frac{3\pi}{4},1)\max\ ,(\pi,0)\min$.

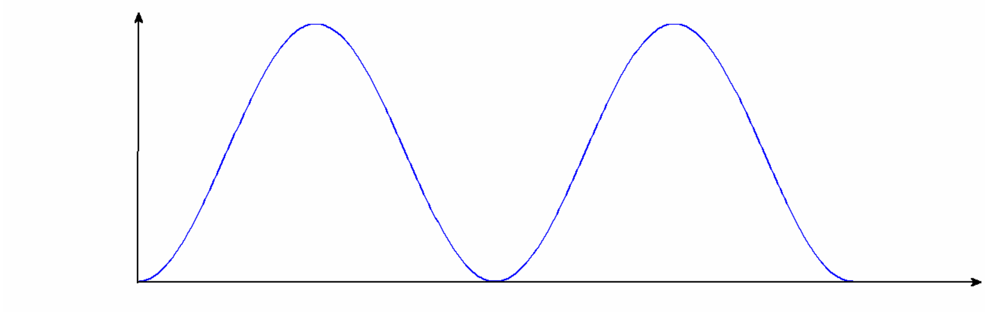
קצה הקטע כבר מוכלים בתוך נקודות הקיצון. האפיון שלנקודות הקיצון נעשה ע"י בדיקת הנגזרת בנקודה לפני ואחרי.

ג. עליה: $0<x<\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$ ירידה: $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$.

ד.הפונקציה $f(x)$ חסומה בין נקודות הקיצון המוחלטות שלה כלומר $0\le f(x)\le 1$.

$8\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x=2f(x)$ לכן מתקבל $0\le 8\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x\le 2$.

ה.



9. א. $\Delta CED\sim\Delta CDM$ (גובה ליתר במשולש ישר זווית מחלק לשלושה משולשים דומים)

לפי פיתגורס במשולש CDM מתקבל ש- $CD=\sqrt{R^2-x^2}$.

יחס הדמיון במשולשים הדומים הוא $k=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{R}$ ולכן יחס השטחים הוא $k^2=\frac{R^2-x^2}{R^2}$.

שטח משולש CDM $S_{\Delta CDM}=\frac{CD\cdot DM}{2}=\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2}$.

מכאן ש- $S_{\Delta EDC}=S_{\Delta CDM}\cdot k^2=\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2}\cdot\frac{R^2-x^2}{R^2}=\frac{x\left(R^2-x^2\right)^{1.5}}{2R^2}$.

ב. $S'=\frac{\left(R^2-x^2\right)^{1.5}}{2R^2}-\frac{3x^2\sqrt{R^2-x^2}}{2R^2}=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{2R^2}\left(R^2-4x^2\right)=0\Rightarrow x=\frac{R}{2}$.

נאפיין קיצון: $S''(x)=-8x\Rightarrow S''(R/2)=-4R<0\Rightarrow\max$ - נגזרת חלקית – רק של החלק הלא חיובי.