מתכונת במתמטיקה 3- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 45 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. דן יצא מתל אביב על אופניו, ורכב במהירות קבועה של v קמ"ש. כעבור $\frac{1}{2}$ שעה מרגע היציאה של דן, גם אילנית יצאה על אופניה מתל אביב להרצליה, ורכבה באותו מסלול במהירות הגדולה ב- 2 קמ"ש ממהירותו של דן. אילנית ודן נפגשו בדרך להרצליה, ו- $\frac{1}{2}$ שעה לאחר הפגישה הגיעה אילנית להרצליה.

מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות v, אם נתון כי מסלול הרכיבה מתל אביב להרצליה קטן מ- 25 ק"מ וגדול מ- 9 ק"מ.

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על פי הכלל: $a_n + a_{n+1} = 5n - 7$.

א. הוכח: $a_{n+2} = a_n + 5$.

ב. נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$.

(1) הראה כי $S_{2n} = 5n^2 - 7n$.　　　(2) הראה כי $S_{2n+1} = a_1 + 5n^2 - 2n$.

(3) נתון $a_1 = -10$, חשב את a_{101} .

3. באחד הדוכנים בלונה פארק אפשר להשתתף במשחק שבו מסובבים שני גלגלים, A ו- B.

כל גלגל מחולק ל- 20 גזרות שוות (לכל אחת מהגזרות יש אותה הסתברות שהגלגל ייעצר עליה, והגלגל אינו נעצר בגבול שבין הגזרות).

בגלגל A יש 2 גזרות אדומות והשאר שחורות. בגלגל B יש 4 גזרות אדומות, והשאר שחורות.

תור אחד במשחק מורכב משני שלבים:

בשלב הראשון – משתתף במשחק מסובב את גלגל A.

בשלב השני – אם הגלגל A נעצר על גזרה אדומה בשלב הראשון, המשתתף מסובב את גלגל B. אם הגלגל נעצר על גזרה שחורה בשלב הראשון, המשתתף מסובב שוב את גלגל A.

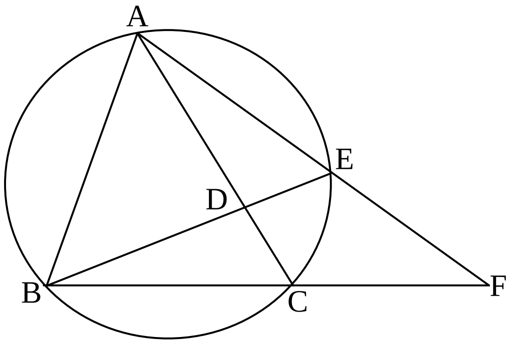
א. ידוע שבתור אחד בשלב הראשון נעצר הגלגל A על גזרה אדומה. מהי ההסתברות שבתור זה התקבלה בשלב השני גזרה שחורה.

ב. (1) מהי ההסתברות שבתור אחד תתקבל לפחות גזרה אדומה אחת?

(2) אם ידוע שבתור אחד הייתה לפחות אחת מהגזרות אדומה, מהי ההסתברות שבתור זה התקבלה רק גזרה אדומה אחת?

ג. משתתף משחק n תורות. הבע באמצעות n את ההסתברות שלא תתקבל כלל גזרה אדומה.

פרק שני – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 4-6.



4. המשולש ABC חסום במעגל. המיתר BE חותך את הצלע AC

בנקודה D. המשכי המיתרים AE ו- BC נפגשים בנקודה F.

נתון: $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC = \sphericalangle AFB$, $AE = 9cm$.

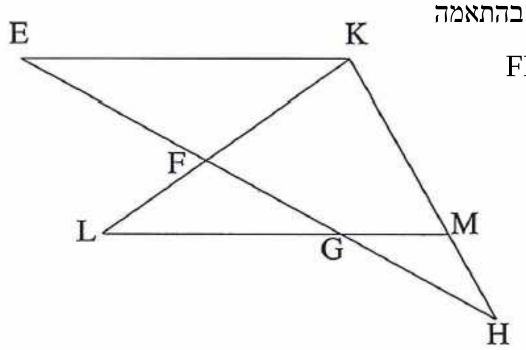
ואורך המשיק למעגל שיוצא מהנקודה F הוא 20 ס"מ.

(1) הוכח: $\Delta BAE \sim \Delta FAB$.

(2) מצא את האורך של AB.

(3) מצא את האורך של BF.

ב. מצא את זווית $\sphericalangle FBE$



5. נתון משלוש KHE. נקודות M ו- G נמצאות על הצלעות KH ו- EH בהתאמה

כך ש- $EK \parallel GM$. נקודה F נמצאת על EH. המשכי הקטעים GM ו- FK

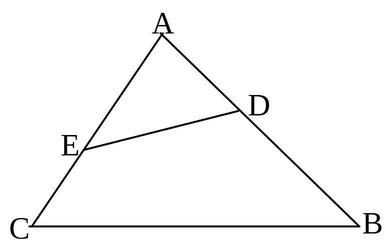
נפגשים בנקודה L (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle KFH = \sphericalangle KML$

א. הוכח: $\Delta KHE \sim \Delta FLG$

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$, $EH = 12.5cm$, $LG = 5cm$

(1) מצא את האורך של EK

(2) מצא את היחס $\frac{MH}{KH}$



6. במשולש ABC הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות AB ו- AC

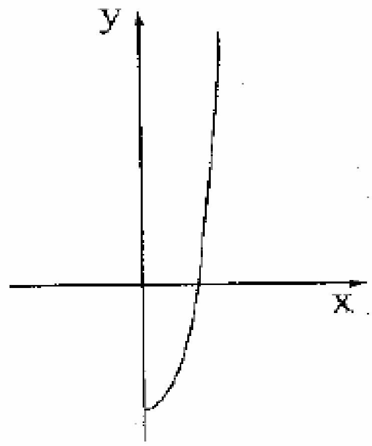
בהתאמה כמתואר בציור. נתון: $\sphericalangle B = \sphericalangle AED = \beta$, $\sphericalangle C = \sphericalangle ADE = \gamma$

$BC = 6cm$, שטח המרובע BCED הוא 5 סמ"ר.

הראה שמתקיים: $DE = \sqrt{36 - 10\left(\frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma}\right)}$

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 7-9.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x^4+4x^3+2x^2-8}{x+2}$, $x\neq -2$.



א. בציור מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $x\geq 0$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=1$.

מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y עבור $x\geq 0$.

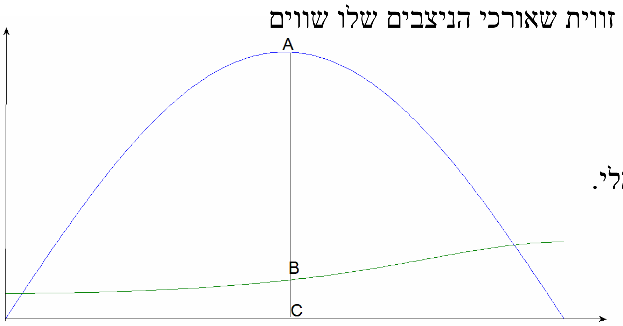
ב (1) מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל תחום ההגדרה שלה.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|$. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

8. בציורים מתוארים הגרפים של הפונקציות: $0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$, $g(x)=\dfrac{1}{8+4\cos 2x}$

מנקודה A שעל אחד הגרפים מורידים אנך לציר x החותך את ציר ה- x בנקודה C, ואת גרף הפונקציה השני בנקודה B. נסמן ב- t את ערך ה- x של נקודה A. בונים משולש ישר זווית שאורכי הניצבים שלו שווים בהתאמה לאורכי הקטעים AC ו- BC.



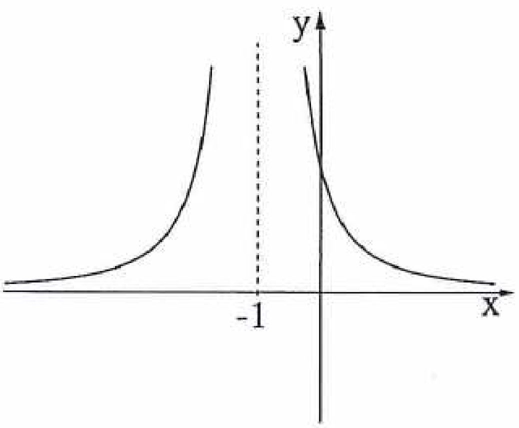
א. הבע בעזרת t את שטח המשולש.

ב. מצא את שיעורי נקודה A עבורם שטח המשולש הוא מקסימלי.

ג. מצא את השטח המקסימלי ואת אורכי הקטעים AC ו- BC.

9. הפונקציה $f(x)$ היא פונקצית מנה המוגדרת עבור $x\neq -1$.

בציור מוצג הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.



א. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של $f(X)$. נמק.

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות בלבד:

$x=-1$, $y=1$. $f(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-1$.

סרטט סקיצה של $f(x)$, על פי הסעיפים הקודמים והנתונים של סעיף זה.

ג. נתון גם $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, a,b,c ו- d הם פרמטרים שונים מאפס.

(1) הבע באמצעות a את c,b ו- d.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x=1$ והצירים

1. x_1 - המרחק בק"מ מתל אביב עד לפגישה. d - המרחק בק"מ מתל אביב להרצליה.

$\frac{x_1}{v}-\frac{x_1}{v+2}=\frac{1}{2}$ הפרש זמנים של דן ואילנית מרגע שהם יצאו מתל אביב עד לפגישה.

$d-x_1=\frac{1}{2}(v+2)$ הדרך שנשארה לאילנית לעבור מהפגישה עד להרצליה.

מהמשוואה הראשונה נקבל - $\frac{x_1}{v}-\frac{x_1}{v+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4x_1=v(v+2)$.

נציב למשוואה השנייה ונקבל - $4d-v(v+2)=2(v+2)\Rightarrow d=\frac{v^2+4v+4}{4}=\left(\frac{v+2}{2}\right)^2$.

כעת נשתמש בכך ש- $9<d=\left(\frac{v+2}{2}\right)^2<25 \Rightarrow 6<v+2<10 \Rightarrow 4<v<8$.

2. א. נציב לכלל הנסיגה $n=n+1$ ונקבל $a_{n+1}+a_{n+2}=5(n+1)-7\Rightarrow a_{n+2}=5n-2-a_{n+1}$.

נציב את כלל הנסיגה לביטוי האחרון ונקבל $a_{n+2}=5n-2-(5n-7-a_n)\Rightarrow a_{n+2}=a_n+5$.

ב. לפי סעיף א' האיברים הזוגים הם סידרה חשבונית עם הפרש 5 וכך גם עבור האבירים האי זוגים.

בנוסף לפי כלל הנסיגה מתקבל $a_2=5-7-a_1=-2-a_1$

(1) יש n אברים זוגים ו- n איברים אי זוגים.

$$S_{2n}=S_{n-odd}+S_{n-even}=\left(2a_1+(n-1)5\right)\frac{n}{2}+\left(2(-2-a_1)+(n-1)5\right)\frac{n}{2}=5n^2-7n$$

(2) יש n אברים זוגים ו- $n+1$ איברים אי זוגים.

$$S_{2n+1}=S_{n+1-odd}+S_{n-even}=\left(2a_1+5n\right)\frac{n+1}{2}+\left(2(-2-a_1)+(n-1)5\right)\frac{n}{2}=a_1+5n^2-2n$$

(3) נמצא כמה אברים אי זוגים יש מ- a_1 עד a_{101} : $101=1+(n-1)2\Rightarrow n=51$.

כעת נשתמש בכך שהאברים האי זוגים מהווים סדרה חשבונית:

$$a_{101}=a_1+(51-1)d=-10+50\cdot5=240$$

3.

א. $P=\frac{16}{20}=0.8$

ב. (1) האפשרויות: אדום + אדום או אדום + שחור או שחור + אדום. כלומר $P=\frac{2}{20}+\frac{18}{20}\cdot\frac{2}{20}=0.19$

(2) זו הסתברות מותנית: המכנה זו התשובה של הסעיף הקודם והמונה האפשרויות הם: אדום + שחור או שחור + אדום. לכן $P=\frac{\frac{2}{20}\cdot\frac{16}{20}+\frac{18}{20}\cdot\frac{2}{20}}{0.19}=\frac{17}{19}$.

ג. ההסתברות שבתור אחד לא תתקבל כלל גזרה אדומה היא $P=\left(\frac{18}{20}\right)^2$. כעת צריך שב- n תורות לא תתקבל גזרה אדומה לכן $P(n)=\binom{n}{n}\left(\frac{18}{20}\right)^{2n}=0.9^{2n}$.

4. (1) $\sphericalangle ABE=\sphericalangle AFB=\alpha$ (נתון) + זווית A היא זווית משותפת. מכאן $\Delta BAE\sim\Delta FAB$ לפי ז.ז

(2) $20^2=EF\cdot AF$ (אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק). $400=(AF-AE)AF\Rightarrow 400=9AF-AF^2\Rightarrow AF=25\ cm$

לפי יחס הדמיון שהוכחנו בסיף א' נקבל $\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AF}$, ולכן $AB^2=25\cdot 9\ \Rightarrow AB=15cm$.

(3) $\sphericalangle ABE=\sphericalangle EBC=\alpha$ (נתון) מכאן BE חוצה זווית B.

$\frac{AB}{BF}=\frac{AE}{EF}\Rightarrow BF=26\frac{2}{3}cm$ (חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שממול הזווית שלני קטעים אשר היחס בניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה)

ב. $\sphericalangle ABC=2\sphericalangle FBE=2\alpha$ (חיבור זוויות).

נשתמש במשפט הקוסינוסים ב- ΔABF - $AB^2+BF^2-2\cdot AB\cdot BF\cos 2\alpha=AF^2$

$$15^2+(26\frac{2}{3})^2-2\cdot 15\cdot 26\frac{2}{3}\cos 2\alpha=25^2\ \Rightarrow\cos 2\alpha=\frac{7}{18}\Rightarrow 2\alpha=67.11\Rightarrow\sphericalangle FBE=33.56^0$$

5. א. $\sphericalangle KML=\sphericalangle KFH=\alpha$ (נתון) ו- $GM\parallel EK$ (נתון). מכאן $\sphericalangle EKM=180-\alpha$ (זוויות חד צדדיות). בנוסף $\sphericalangle GFL=180-\alpha$ (זוויות צמודות). $\Leftarrow \sphericalangle GFL=\sphericalangle EKM=180-\alpha$

$\sphericalangle KEG=\sphericalangle LGE=\beta$ (זוויות מתחלפות בין ישירים מקבילים שוות).

$\Delta KHE\sim\Delta FLG$ לפי ז.ז.

ב. לפי הנתון מתקבל $EK \parallel LG$, לכן לפי הרחבה של תלס והנתון ש- $\frac{EF}{GE}=\frac{3}{5} \Rightarrow EF=3x\ ,\ GE=5x$

מתקבל $\frac{EF}{FG}=\frac{EK}{LG} \Rightarrow \frac{EF}{GE-FE}=\frac{3}{2}=\frac{EK}{5} \Rightarrow EK=7.5cm$.

ג. מהדמיון של סעיף א' מתקבל - $\frac{5}{12.5}=\frac{FG}{7.5} \Rightarrow FG=3cm=2x \Rightarrow x=1.5cm$ (יחס צלעות במשולשים דומים שווה). נמצא את $GH=12.5-5x=5cm$

$GM \parallel EK$ לכן לפי הרחבה של תלס מתקבל $\frac{HG}{HE}=\frac{MH}{KH}=\frac{5}{12.5}=\frac{2}{5}$

6. $\measuredangle EAD=190-\gamma-\beta$ (סכום זוויות באחד מהמשולשים שווה ל- 180 מעלות)

נשתמש במשפט הסינוסים ב- ΔAED - $\frac{ED}{\sin(180-\gamma-\beta)}=\frac{AE}{\sin\gamma} \Rightarrow AE=\frac{ED\cdot\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)}$

שטח משולש AED : $S_1=\frac{ED\cdot AE}{2}=\frac{ED^2\cdot\sin\gamma}{2\sin(\gamma+\beta)}\sin\beta$.

נשתמש במשפט הסינוסים ב- ΔAED - $\frac{CB}{\sin(180-\gamma-\beta)}=\frac{AB}{\sin\gamma} \Rightarrow AB=\frac{6\cdot\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)}$

שטח משולש AED : $S_1=\frac{CB\cdot AB}{2}=\frac{36\cdot\sin\gamma}{2\sin(\gamma+\beta)}\sin\beta$.

$$S_2-S_1=5 \Rightarrow \frac{36\sin\gamma\sin\beta}{2\sin(\gamma+\beta)}-\frac{DE\sin\gamma\sin\beta}{2\sin(\gamma+\beta)}=5 \Rightarrow DE=\sqrt{36-\frac{10\sin(\gamma+\beta)}{\sin\gamma\sin\beta}}$$

בעזרת הנוסחא $\sin(\gamma+\beta)=\sin\gamma\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma$ נקבל .

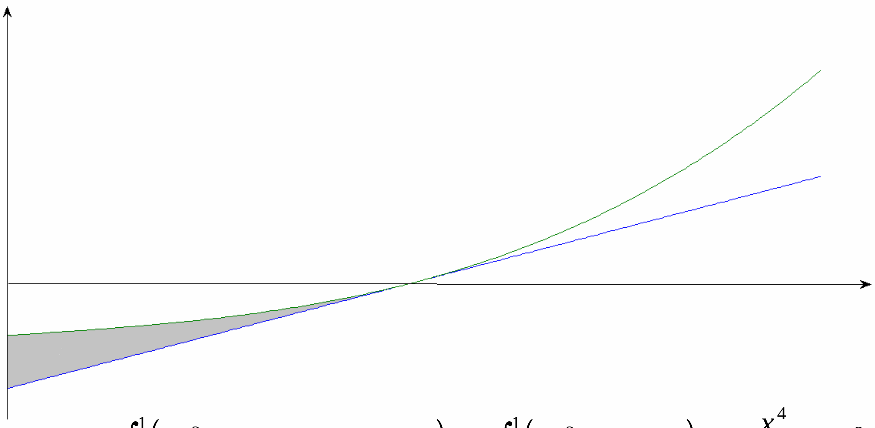
$$DE=\sqrt{36-\frac{10\sin\gamma\cos\beta+10\sin\beta\cos\gamma}{\sin\gamma\sin\beta}}=\sqrt{36-\frac{10\cos\beta}{\sin\beta}-\frac{10\cos\gamma}{\sin\gamma}}=\sqrt{36-\left(\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\tan\gamma}\right)}$$

7. ע"י חילוק פולינומים מתקבלת הפונקציה הבאה. הפונקציה שהתקבלה זהה לפונקציה המקורית עבור כל $x\neq-2$:

$$f(x)=\frac{2x^4+4x^3+2x^2-8}{x+2}=\frac{(x+2)(2x^3+2x-4)}{x+2}=2x^3+2x-4$$

א. $f(1)=0$ ו- $f'(1)=8$. $f'(x)=6x^2+2 \Rightarrow$ משוואת המשיק היא $y=8x-8$.

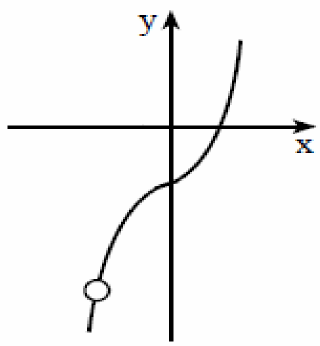
נצייר את הפונקציה ומשוואת המשיק באותה סקיצה:



$$S=\int_0^1\left(2x^3+2x-4-(8x-8)\right)dx=\int_0^1\left(2x^3-6x+4\right)dx=\frac{x^4}{2}-3x^2+4x\Big|_0^1=1.5$$

ב. (1) אין נקודות קיצון $f'(x)=6x^2+2=0\Rightarrow$. ניתן גם לראות שהנגזרת תמיד חיובית לכן הפונקציה עולה עבור כל $x\neq-2$, ויורדת עבור אף x.

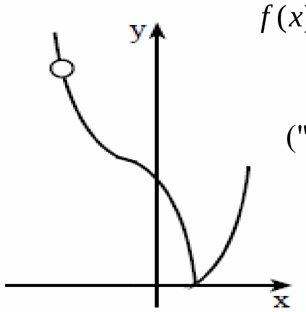
(2) מכיוון שהצלחנו לצמצם את המכנה ניתן להבין שב- $x=-2$ יש חור.



ג. עבור $x>1$ הפונקציה $g(x)$ נשארת זהה ל- $f(x)$

עבור $x<1$ הפונקציה $g(x)$ זהה ל- $-f(x)$.

ב- $x=1$ הפונקציה מקבלת נקודת מינימום ("חוד")



8. נקודה A - $\left(t,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t\right)$. גם לנקודה B יש אותו שיעור x $\Leftarrow$ $B:\left(t,\frac{1}{8+4\cos 2t}\right)$ ונקודה C $(t,0)$.

$AC=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t$, $BC=\frac{1}{8+4\cos 2t}$. שטח המשולש $S=\frac{BC\cdot AC}{2}=\frac{1}{8+4\cos 2t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2t$

$$S'=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\cos 2t(8+4\cos 2t)+8\sin 2t\cdot\sin 2t}{(8+4\cos 2t)^2}=0\Rightarrow 8\cos^2 t+8\sin^2 t+16\cos 2t=0$$

$8+16\cos 2t=0\Rightarrow\cos 2t=-0.5\Rightarrow 2t=\pm\frac{2\pi}{3}+\pi k$. התשובה הרלוונטית בתחום היא $t=\frac{\pi}{3}$.

נראה שמדובר בשטח מקסימלי $S'(\frac{4\pi}{9})<0$, $S'(\frac{\pi}{6})>0$ לכן השטח מקסימלי. נקודה A היא $\left(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\right)$

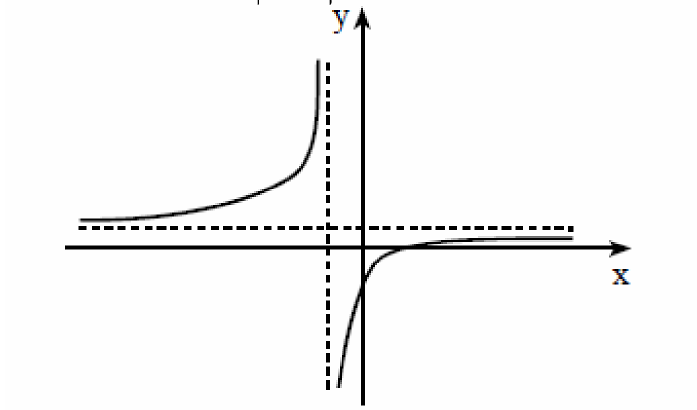
השטח המקסימלי הוא $S(\pi/3)=\frac{1}{8+4\cos 2\pi/3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\pi/3=\frac{1}{16}$. באותו אופן מתקבל ש-

$BC=\frac{1}{6}$, $AC=\frac{3}{4}$.

9. א. עבור $x<-1$ $f'(x)$ עולה $\leftarrow$ $f''(x)$ חיובית ולכן $f(x)$ קעורה כלפי מעלה.

עבור $x>-1$ $f'(x)$ יורדת $\leftarrow$ $f''(x)$ שלילית ולכן $f(x)$ קעורה כלפי מטה.

ב. הנגזרת הראשונה תמיד לחיובית לכן הפונקציה עולה עבור כל x בתחום הגדרה.



ג. (1) הפונקציה מקבלת אסימפטוטה אופקית ב- $y=1$ לכן $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{a}{c}=1\Rightarrow c=a$

הפונקציה לא מוגדרת ב- $x=-1$ לכן $cx+d=0\Rightarrow c=d=a$. בנוסף $f(0)=-1\Rightarrow b=-d=-a$.

(2) $\int_0^1 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^1=\frac{a+b}{c+d}-\frac{b}{d}=\frac{a-a}{2a}-\frac{-a}{a}=0+1=1$