מתכונת במתמטיקה 5- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 50 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. כדור פורח עם מנוע יצא מיגור, וריחף במשך 20 דקות עם כיוון הרוח עד הגיעו למרכז הכרמל בחיפה. לאחר מכן החל לרחף בחזרה לכיוון יגור. לאחר 25 דקות, היה הכדור הפורח במרחק של 150 מטר לפני יגור.

יומיים לאחר מכן, ריחף הכדור הפורח מבאר שבע נגד כיוון הרוח. מהירות הרוח שנשבה בעת שריחף הייתה גדולה פי 3 ממהירות הרוח שנשבה בעת טיסתו למרכז הכרמל. לאחר 10 דקות נמצא הכדור הפורח במרחק של פחות מ- 30 מטרים מנקודת מוצאו בבאר שבע.

ידוע כי מהירות הכדור הפורח הייתה זהה בשתי הפעמיים.

מצא את התחום שבו נמצאת מהירותו העצמית של הכדור הפורח (ללא רוח עם מנוע בלבד), במקרים הבאים:

א. ידוע כי הכדור הפורח הצליח להתקדם בעת טיסתו מבאר שבע נגד כיוון הרוח.

ב. לא ידוע האם הכדור הפורח התקדם בעת טיסתו מבאר שבע נגד כיוון הרוח, או נסחף עם הרוח אחורנית מנקודת מוצאו בבאר שבע.

2. יהיו k ו- m שני מספרים טבעיים כך ש- $m > k$

נתונה הסדרה החשבונית $\frac{5k+1}{5},\frac{5k+2}{5},...,\frac{5m-1}{5}$

א. הבע ע"י m ו- k את כמות האיברים שניתנים לצמצום ללא שארית בסדרה.

ב. הבע ע"י m ו- k את סכום הסדרה.

ג. הוכח סכום האיברים שאינם ניתנים לצמצום ללא שארית הוא $2(m^2-k^2)$.

3. במאפייה גדולה מייצרים עוגות. חלק מהעוגות הולכת לייצוא וחלק לצריכה ברחבי הארץ. בקרת האיכות של המאפייה כוללת שלושה שלבים. בשלב הראשון בודק האופה את העוגה. האופה מעביר 80% מהעוגות לייצוא, 15% לצריכה ברחבי הארץ ו- 5% נפסלות לשיווק וניתנות כפינוק לחתולי הרחוב.

כל העוגות שנבחרו על ידי האופה כמתאימות לייצוא מגיעות לקונדיטור הראשי. הקונדיטור הראשי מחליט כי אחוז קבוע מהעוגות מתאימות לייצוא וכי השאר מתאימות לצריכה ברחבי הארץ.

לבסוף, כל העוגות שהקונדיטור הראשי קבע שהן מתאימות לייצוא מגיעות לטועמת. הטועמת מחליטה על אותו אחוז של עוגות כמתאימות לייצוא כמו הקונדיטור הראשי, ולגבי השאר היא קובעת שהן מתאימות לצריכה ברחבי הארץ.

א. ידוע כי אם נבחרה עוגה שיוצרה במאפיה, וידוע שהיא מתאימה לצריכה ארצית, אזי ההסתברות שהיא נבדקה על ידי הטועמת היא $\frac{28}{93}$.

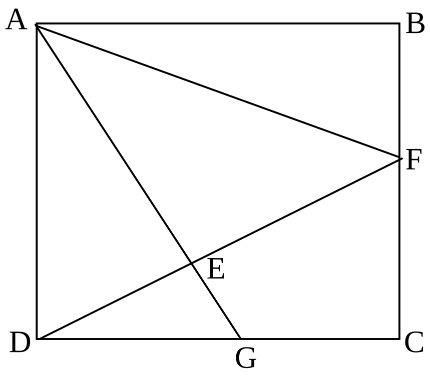
מצא מה ההסתברות שעוגה שהגיעה לבדיקה אצל הקונדיטור הראשי מתאימה לייצוא.

(בחר את ההסתברות הקטנה)

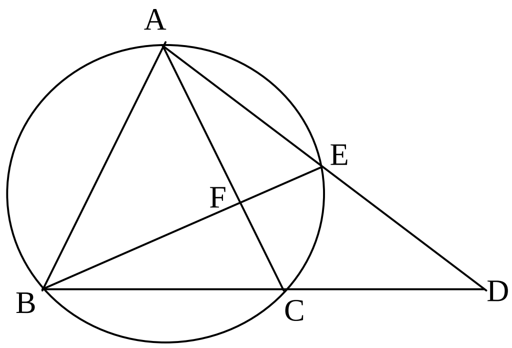
ב. מהי ההסתברות שעוגה שנאפתה על ידי המאפיה תתאים לצריכה ארצית ולא לייצוא?

ג. בוחרים שתי עוגות שנאפו במאפיה. מהי ההסתברות שהראשונה תתאים לייצוא והשנייה תתאים לצריכה ארצית

פרק שני – יש לענות על שאלה אחת מבין השאלות 4-5



4. נתון ריבוע ABCD שבו המרובע ABFE הוא בר חסימה במעגל.
הוכח:
א. $BF = CG$
ב. $\angle FDC + \angle BAF = \angle AFD$
ג. נתון: רדיוס המעגל החוסם את ΔAEF שווה ל- EF.
הוכח: $\angle BFA + \angle AGD = 120^0$



5. ABC משולש שווה שוקיים החסום במעגל $(AB = AC)$
נתון: $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$, E נקודת השקה של AC,
כך ש- $\angle EBC = \beta$. המשכי הקטעים AE ו- BC נפגשים
בנקודה D. נקודה F היא מפגש הקטעים AC ו- BE.
הבע באמצעות β , α , a :
א. את רדיוס המעגל החוסם את המשולש AFE.
ב. את אורך הקטע ED

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x^2-ax+b}$. הישר $x=3$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

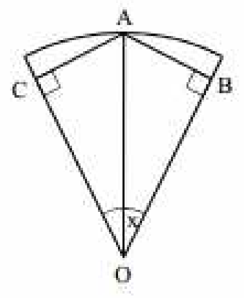
א. מצא את a ו- b.

ב. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודת קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.

(5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה

ד. מצא את נקודות החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הישר $y=x-8$.



7. בציור מתוארת גיזרת מעגל שמרכזו O.
הזווית המרכזית המתאימה לגיזרה היא $\measuredangle COB=60^0$.
על הקשת של הגיזרה בוחרים נקודה A כלשהי ומורידים
אנכים (AC ו- AB) לשני הרדיוסים.
א. מצא מה צריכה להיות הזווית AOB,
כדי ששטח המרובע ABOC יהיה מקסימלי
ב. מצא פתרון כללי עבורו פונקצית שטח המרובע ABOC מתאפסת.

8. נתונה הפונקציה $a<0$, $y=\frac{ax^3+2ax^2+8x+b}{x+2}$
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ הוא -2 . כמו כן, ידוע כי הפולינום
$y=ax^3+2ax^2+8x+b$ מתחלק ב- $x+2$ ללא שארית.

א. חשב את a ואת b
ב. שרטט סקיצה של הפונקציה ומשוואת המשיק.
ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- y.
ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x

בהצלחה !

1. נגדיר: v - המהירות העצמית של הכדור הפורח במטר לדקה.
u - המהירות של הרוח בפעם הראשונה במטר לדקה. $3u$ - המהירות של הרוח בפעם השנייה במטר לדקה.
נשווה את המרחקים שעבר הכדור בפעם הראשונה בהלוך ובחזור - $(v+u)20=150+25(v-u)$

$$20v+20u=150+25v-25u \Rightarrow u=\frac{30+v}{9}$$

המרחק שעבר הכדור בפעם השנייה - $x=(v-3u)10=\frac{20v-300}{3}$

א. $15<v<19.5 \Rightarrow 0<\frac{20v-300}{3}<30$ - המהירות בין 15 מטר לדקה ל 19.5 מטר לדקה.

ב. $10.5<v<19.5 \Rightarrow -30<\frac{20v-300}{3}<30$ המהירות בין 10.5 מטר לדקה ל 19.5 מטר לדקה.

2. א. האיבר הראשון שניתן לצמצום ללא שארית הוא $\frac{5k+5}{5}$

האיבר השני הוא $\frac{5k+10}{5}$ לכן ניתן להסיק שגם סדרה זו היא חשבונית וההפרש של סדרה זו הוא $d=1$

האיבר האחרון שניתן לצמצום ללא שארית הוא $\frac{5m-5}{5}$.

לפי נוסחת מקום לסדרה חשבונית - $\frac{5m-5}{5}=\frac{5k+5}{5}+(n-1)1 \Rightarrow \quad n=m-k-1$

ב. בסדרה המקורית הפרש הסדרה הוא $\frac{1}{5}$. נמצא את מספר האיברים בסדרה לפי נוסחת מקום:

$$\frac{5m-1}{5}=\frac{5k+1}{5}+(n-1)\frac{1}{5} \Rightarrow n=5m-5k-1.$$

לפי נוסחת סכום של סדרה חשבונית - $S_{n=5m-5k-1}=\left[2\cdot\frac{5k+1}{5}+(5m-5k-1-1)\frac{1}{5}\right]\frac{5m-5k-1}{2}$

ומכאן מתקבל $S_n=\frac{(k+m)(5m-5k-1)}{2}$.

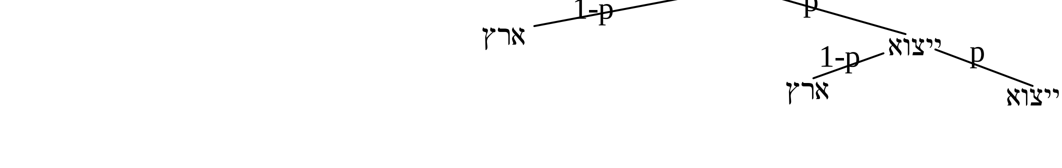
ג. נחשב את סכום האיברים שניתנים לצמצום ללא שארית -

$$S_{n=m-k-1}=\left[2\cdot\frac{5k+5}{5}+(m-k-1-1)\right]\left(\frac{m-k-1}{2}\right)=\frac{(k+m)(m-k-1)}{2}$$

סכום האיברים שלא מתחלקים ב- 5 ללא שארית הוא חיסור של שתי הסדרות שחושבו

$$S=\frac{(k+m)(5m-5k-1)}{2}-\frac{(k+m)(m-k-1)}{2}=\frac{(k+m)(4m-4k)}{2}=2(m-k)^2$$

3. נעזר בדיאגרמת עץ



א. נמצא את ההסתברות שעוגה מתאימה לצריכה ארצית - $P(\text{ארץ}) = 0.15 + 0.8(1-p) + 0.8p(1-p)$

ההסתברות שעוגה שמתאימה לצריכה ארצית נבדקה על ידי הטועמת - $P(\text{ארץ} \cap \text{טועמת}) = 0.8p(1-p)$

$$P(\text{טועמת} / \text{ארץ}) = \frac{P(\text{ארץ} \cap \text{טועמת})}{P(\text{ארץ})} = \frac{0.8p(1-p)}{0.95 - 0.8p^2} = \frac{28}{93} \Rightarrow 74.4p - 52p^2 - 26.6 = 0 \Rightarrow p = 0.7\ , \frac{19}{26}$$

ב. $P(\text{ארץ}) = 0.95 - 0.8p^2 = 0.558$

ג. $P(\text{יצוא}) + P(\text{ארץ}) = 0.95 \Rightarrow P(\text{יצוא}) = 0.392$ ומכאן ש- $P = 0.392 \cdot 0.558 = 0.218736$

4. א. נגדיר $\prec FDC = \alpha$. (*) $\prec ADC \prec FCD = \prec ABF = 90^0$ (זוויות בריבוע שוות ל 90 מעלות).

$\prec FDA = 90 - \alpha$ (חיסור זוויות). $\prec DFC = 90 - \alpha$ (סכום זוויות ב- ΔDFC שווה ל180 מעלות).
מרובע ABFE בר חסימה במעגל לכן $\prec AEF = 90^0$ (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל שווה ל 180 מעלות). $\prec AED = 90^0$ (זוויות צמודות).
$\prec DAE = \alpha$ (סכום זוויות ב- ΔAED שווה ל180 מעלות). מכאן (**) $\prec DAE = \prec FDC$
(***) $AD = DC = BC$ (כל הצלעות במרובע שוות)
$\Delta ADG \cong \Delta DCF$ (ז.צ.ז)
$DG = FC$ (במשולשים חופפים הצלעות שוות בהתאמה)
$BF = BC - FC\ ,\ GC = DC - DG \Rightarrow BF = CG$

ב. נגדיר $\prec BAF = \beta$. $\prec BFA = 90 - \alpha$ (סכום זוויות ב- ΔABF שווה ל- 180 מעלות).
$\prec DFC + \prec AFB + \prec AFD = 180^0 \Rightarrow \prec AFD = 180 - (90-\alpha) - (90-\beta) = \alpha + \beta$.

ג. $\prec AEF = 90^0$ לכן $AF = 2R$ הוא קוטר במעגל (זווית היקפית שווה ל 90 מעלות נשענת על קוטר)
$EF = R$ (נתון). במשולש AEF היתר גדול פי 2 מאחד מהניצבים לכן $\prec EAB = 30^0$
$\alpha + \beta = 60^0$ (סכום זוויות במשולש AEF שווה ל 180 מעלות).
$\prec BFA + AGD = 90 - \beta + 90 - \alpha = 180 - (\beta + \alpha) = 120^o$

5. א. נתון: ΔABC משולש שווה שוקים ו- $\prec BAC = \alpha$.
מכאן $\prec B = \prec C = 90 - \alpha/2$ (זוויות בבסיס במש"ש שוות וסכום זוויות ב- ΔABC שווה ל- 180 מעלות).
$\prec EBC = \beta$ (נתון) וע"י חיסור זוויות מתקבל $\prec ABE = 90 - \alpha/2 - \beta$.
$\prec AFB = 90 + \beta - \alpha/2$ (סכום זוויות ב- ΔABF שווה ל-180 מעלות).
$\prec AFE = 90 - \beta + \alpha/2$ ($\prec AFB$ ו- $\prec AFE$ זוויות צמודות).
$\prec EBC = \prec CAE = \beta$ (זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת שוות).
$\prec AEF = 90 - \alpha/2$ (סכום זוויות ב- ΔAFE שווה ל-180 מעלות).

נשתמש במשפט הסינוסים ב- ΔABC - $\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(90 - \alpha/2)} \Rightarrow AB = AC = \frac{a\cos(\alpha/2)}{\sin\alpha}$.

נשתמש במשפט הסינוסים ב- ΔABF -

$$\frac{AF}{\sin(90 - \alpha/2 - \beta)} = \frac{AB}{\sin(90 + \beta - \alpha/2)} \Rightarrow AF = \frac{a\cos(\alpha/2)\cos(\alpha/2 + \beta)}{\sin\alpha\cos(\alpha/2 - \beta)}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔAFE $\frac{AF}{\sin(90 - \alpha/2)} = 2R \Rightarrow R = \frac{a\cos(\alpha/2 + \beta)}{2\sin\alpha\cos(\alpha/2 - \beta)}$

ב. $\angle BED = 90+\alpha/2$ ($\angle BED$ ו- $\angle AEB$ זוויות צמודות).

$\angle ADB = 90-\beta-\alpha/2$ (סכום זוויות ב- ΔADB שווה ל-180 מעלות).

לפי משפט הסינוסים ב- ΔABE - $\frac{BE}{\sin(\beta+\alpha)}=\frac{AB}{\sin(90-\alpha/2)} \Rightarrow BE=\frac{a\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha}$.

לפי משפט הסינוסים ב- ΔBED - $\frac{BE}{\sin(90-\beta-\alpha/2)}=\frac{DE}{\sin\beta} \Rightarrow DE=\frac{a\sin(\beta+\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha\cos(\beta+\alpha/2)}$.

6. א. נשים לב כי $x=3$ מאפס גם את המונה וגם את המכנה לכן יש לדרוש שהוא יאפס את המכנה פעמים.

כלומר, המכנה חייב להיות מהצורה $(x-3)^2$ ומכאן ש $a=6$,$b=9$

ב. $f(x)=\frac{x^2+x-12}{(x-3)^2}$.

(1) תחום הגדרה - $x \neq 3$.

(2)+(3) קיצון -

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-3)^2-2(x^2+x-12)(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{(2x+1)(x-3)-2(x^2+x-12)}{(x-3)^3}=\frac{-7(x-3)}{(x-3)^3}=\frac{-7}{(x-3)^2}$$

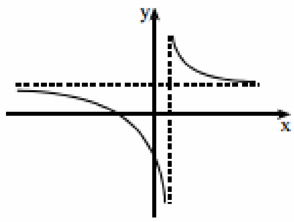
קבלנו שאין נקודות קיצון והנגזרת תמיד שלילית בתחום הגדרה כלומר הפונקציה תמיד יורדת בתחום הגדרה.

(4) נקודות חיתוך עם הצירים - $f(0)=-\frac{4}{3} \Rightarrow (0,-\frac{4}{3})$. $f(x)=0 \Rightarrow x^2+x-12=0 \Rightarrow (-4,0)$.

(5) אסימפטוטה אנכית מתקבלת ב- $x=3$.

אסימפטוטה אופקית כאשר $y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-12}{x^2-6x+9}=1$.

ג.



ד.

$$\frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)^2}=x-8 \Rightarrow x+4=(x-3)(x-8)$$

$$x^2-12x+20=0 \Rightarrow (10,2)\ ,\ (2,-6)$$

7. א. נחלק את המרובע ABOC לשני משולשים ABO ו- ACO.

נגדיר: $\angle COA=60-x \Leftarrow \angle COB=60^0$, $\angle AOB=x$. בנוסף נתון $AO=R$ ו- $\angle B=\angle C=90^0$

$$\frac{OB}{OA}=\cos x \Rightarrow OB=R\cos x \quad , \quad \frac{AB}{AO}=\sin x \Rightarrow AB=R\sin x.$$

$$\frac{OC}{AO}=\cos(60-x) \Rightarrow AB=R\cos(60-x)\ ,\ \frac{AC}{AO}=\sin(60-x) \Rightarrow AB=R\sin(60-x)$$

$$S_{OCAB}=S_{ACO}+S_{ABO}=\frac{AC\cdot CO}{2}+\frac{AB\cdot BO}{2}=\frac{R^2\sin x\cos x}{2}+\frac{R^2\sin(60-x)\cos(60-x)}{2}$$

נשתמש בזהות $\sin 2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha$ ונקבל $S_{OCAB}=\frac{R^2}{4}\left(\sin 2x+\sin(120-2x)\right)$.

$$S'_{OCAB}=\frac{R^2}{4}\left(2\cos 2x-2\cos(120-2x)\right)=0 \Rightarrow \cos 2x=\cos(120-2x)$$

$2x=120-2x+360k \Rightarrow x=30+90k$ או $2x=-120+2x+360k \Rightarrow \phi$

$0<x<60$ לכן הפתרון היחידי בתחום הוא $x=30^0$.

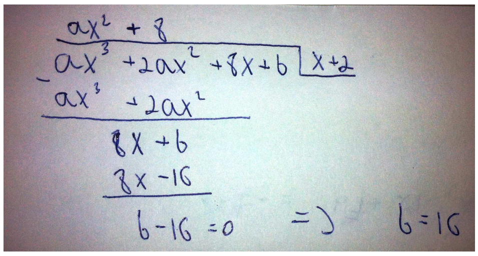
נציבים ערכים לנגזרת הראשונה- $S'_{OCAB}(45^0)<0$, $S'_{OCAB}(10^0)>0$ לכן $x=30^0$ היא מקסימום.

ב.

$$S_{OCAB}=\frac{R^2}{4}\left(\sin 2x+\sin(120-2x)\right)=0 \Rightarrow \sin 2x=-\sin(120-2x) \Rightarrow \sin 2x=\sin(2x-120)$$

$2x=2x-120+360k \Rightarrow \phi$ או $180-2x=2x-120+360k \Rightarrow x=75+90k$

8. א.

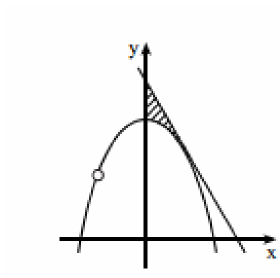


$$y=\frac{ax^3+2ax^2+8x+b}{x+2}=ax^2+8 \quad ,x\neq -2$$

$$y'=2ax \Rightarrow y'(2)=4a=-2 \Rightarrow a=-0.5$$

ב. נמצא את משוואת המשיק $y(2)=-0.5\cdot 2^2+8=6$, $m=-2$

לכן $y-6=-2(x-2) \Rightarrow y=-2x+10$



ג. $$\int_0^2\left(-2x+10+0.5x^2-8\right)dx=\int_0^2\left(0.5x^2-2x+2\right)dx=\frac{x^3}{6}-x^2+2x\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

ד. נמצא את נקודת החיתוך של המשיק ושל הפונקציה עם ציר ה- x החיובי - $(5,0)$ ו- $(4,0)$

$$\int_2^5\left(-2x+10\right)dx-\int_2^4(-0.5x^2+8)dx=(-x^2+10x)\Big|_2^5+(\frac{x^3}{6}-8x)\Big|_2^4=9-6.6666=2.3333$$