

שאלון 582 - מתכונת 2019

פרק ראשון - גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($\frac{2}{3}$ נק') (66 נק')

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נק')

1. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{25n-100} + \frac{y^2}{54-9n} = 1$ (n טבעי).

א. מצא את n.

ב. האליפסה חותכת את ציר ה-x בנקודות A ו-B. הנקודה C נמצאת על האליפסה כך שהנקודה

p היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ΔABC . הוכח שהמקום הגיאומטרי של כל הנקודות p האפשריות הוא אליפסה, מצא את משוואתה ואת שיעורי המוקדים שלה.

ג. מוקדי האליפסה שנמצאת בסעיף ב' הם הנקודות D ו-E. הנקודות F ו-G נמצאות על אליפסה

זו מעל ציר ה-x ומתחתיו בהתאמה. עבור כל טענה קבע האם היא נכונה או שגויה. נמק.

i. כאשר המרובע DFEG הוא מעוין אז שטחו מקסימלי.

ii. עבור מיקום מסוים של הנקודות F ו-G יהיה היקף המרובע DFEG מקסימלי.

2. בטראזר SABC נתון: $\overline{CB} = \underline{u}$, $\overline{SA} = \underline{v}$, $\overline{CS} = \underline{w}$, $CS \perp BS$, $\angle ASB = 30^\circ$, $\angle ASC = 60^\circ$.

נסמן: $SA = a$, $CB = 2b$, $CS = b$.

א. הבע באמצעות a ו-b את ערך המכפלה $\underline{v} \cdot \underline{u}$.

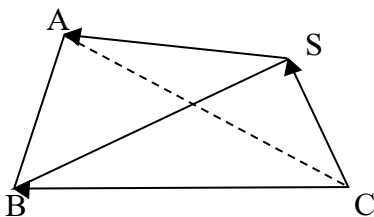
ב. קבע איזה תנאי צריך להתקיים בין a ל-b

כך שהזווית $\angle BAC$ תהיה קהה. נמק את תשובתך.

ג. נתון: $\overrightarrow{BS} = (3, -1, 2) + t(k, -k, 2)$,

$\overrightarrow{CS} = (2, 0, 0) + m(3, k+4, k)$ ($0 < k$)

קבע האם הישר AS עובר בראשית הצירים. נמק את תשובתך.



3. בסדרה חשבונית שסכומה $Z_1 = 210(1+i)$, האיבר הראשון הוא $i+20$ וההפרש $i-1$.

א. מצאו כמה איברים יש בסדרה.

ב. Z_1 הוא אחד מקדקודיו של מצולע משוכלל בעל $2m$ צלעות, אשר חסום במעגל קנוני במישור

גאוס. קודקודי המצולע לפי הסדר נגד כיוון השעון הם: $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{2m}$.

1. הבע באמצעות m את שני הקדקודים הסמוכים ל- Z_1 משני צדיו.

2. ראשית הצירים בנקודה O . נתון שהמכפלה $Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4$ היא מספר הנמצא ברביע השני

במישור גאוס. הסבר מה ניתן להסיק מנתון זה על:

א. מספר הצלעות במצולע.

ב. גודל הזווית $\angle Z_7 O Z_8$.

פרק שני - גידול ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נק')

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

4. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln^a x - 5 \ln x + 6}{\ln^a x - 6 \ln x + 8}$ היא $x = e^4$.

א. מצא את:

1. הפרמטר a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

2. נקודות החיתוך של גרף $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

3. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$.

ג. הגדירו פונקציה חדשה: $h(x) = |f(x)| - 1$.

עבור כל אחת מטענות הבאות קבע האם היא נכונה או שגויה:

i. למשוואה $h(x) = 0$ יש שני פתרונות.

ii. קיימים רק שני ערכי k שעבורם למשוואה $h(x) = k$ יש פתרון יחיד.

5. גרף הפונקציה: $f(x) = 2^m - \frac{2^m}{e^x + 1}$ ($0 < m$) חותך את ציר ה- y בנקודה A .

א. היעזר בפרמטר m , במידת הצורך, ומצא עבור הפונקציה $f(x)$ את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- y .

2. תחומי העליה והירידה, אם יש כאלה.

3. האסימפטוטות המאונכות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון שהשטח המוגבל בין גרף $f(x)$ לבין ציר ה- x והישרים $x = a$ ו- $x = -a$ קטן מ- $16a$.

קבע האם יתכן ששיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A הוא 2.

נמק את תשובתך.

בהצלחה!

תשובות:

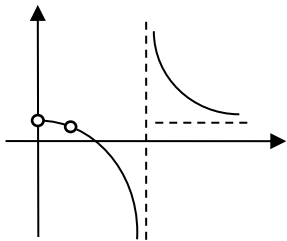
1) א. $n=5$. ב. האליפסה $\frac{9x^2}{25} + y^2 = 1$ ללא הנקודות $(2.5, 0)$, $(-2.5, 0)$. המוקדים $(1\frac{1}{3}, 0)$, $(-1\frac{1}{3}, 0)$.

ג. (i) נכונה. (ii) שגויה.

2) א. $2ab$. ב. $a < b$. ג. אינו עובר.

3) א. 20 איברים. ב. (1) $Z_2 = \sqrt{2} \cdot 210 \operatorname{cis}\left(45^\circ + \frac{180^\circ}{m}\right)$, $Z_{2m} = \sqrt{2} \cdot 210 \operatorname{cis}\left(45^\circ - \frac{180^\circ}{m}\right)$

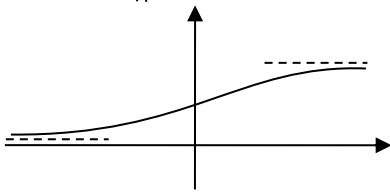
2) א. במצולע יש מספר זוגי של צלעות, החל מ-50 ומעלה. ב. הזווית קטנה או שווה ל- 7.2° .



4) א. (1) $a=2$. תחום ההגדרה: $e^4 < x$ או $e^2 < x < e^4$ או $0 < x < e^2$. (2) $(e^3, 0)$.

(3) $x=e^4$, $y=1$. ב. השרטוט משמאל.

ג. (i) שגויה. (ii) שגויה.



5) א. (1) $(0, 2^{m-1})$. (2) הפונקציה עולה לכל x . (3) $y=2^m$, $y=0$. ב.

ג. יתכן.