מתכונת במתמטיקה 4- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 50 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. אופיר וליאור אורזים מתנות לחג בקצב שונה. בחנוכה, כאשר שניהם עבדו במשך אותו זמן, הספיק אופיר להכין 25 מתנות יותר מליאור. בסוכות, הספיק אופיר להכין את אותה כמות המתנות שהספיק ליאור בחנוכה, וליאור הספיק להכין את כמות המתנות שהכין אופיר בחנוכה. בסוכות, זמן העבודה של ליאור היה ארוך פי 4 מזמן העבודה של אופיר.

א. מצא כמה מתנות הכין כל אחד מהם בחנוכה.

ב. נסמן ב- t_1 את הזמן הדרוש לאופיר לארוז מתנה אחת, וב- t_2 הזמן הדרוש לליאור לארוז מתנה אחת.
חשב את היחס $t_1 : t_2$.

2. הסדרה A_n היא הנדסית אינסופית יורדת שאיבריה חיובים. מהסדרה A_n מרכיבים שתי סדרות חדשות שהאיברים הכלליים שלהן הם: $B_n = A_{n+1} \cdot A_{n+3}$, $C_n = (A_n)^2$.

א. הוכח ששתי הסדרות החדשות, B_n ו- C_n, גם הן סדרות הנדסיות אינסופיות <u>יורדות</u>.

ב. נתון: סכום הסדרה C_n גדול פי 16 מסכום הסדרה B_n. מצא את מנת הסדרה המקורית A_n .

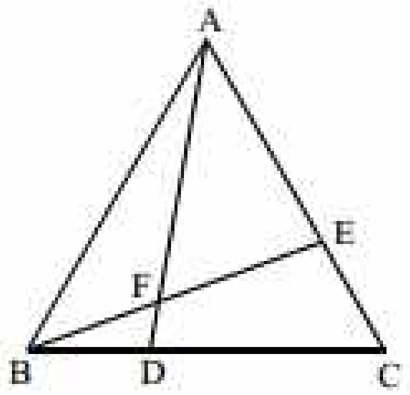
ג. למרות שהסדרה A_n היא אינסופית, תלמיד עובר על האיברים החל מהראשון והלאה. ברגע שהגיע לאיבר מסוים שמיקומו אי זוגי, הוא מחליט למחוק את כל האיברים <u>הקטנים</u> מאיבר זה. בסדרת האיברים שלא נמחקו, האיבר הראשון גדול פי ארבעה מהאיבר האמצעי. מצא כמה איברים בסדרת האיברים שלא נמחקו.

3. ארצ'י הוא כלב מסוכן הנמצא במעקב משטרתי של שלושה ימים רצופים. ההסתברות שהוא ישתולל ביום א' היא p $(p < 0.4)$. אם הוא משתולל ביום מסוים, ההסתברות שהוא ישתולל גם למחרת היא $p + 0.1$. אם הוא אינו משתולל ביום מסוים, ההסתברות שלא ישתולל גם למחרת היא $p + 0.3$. ההסתברות שרק ביום השני הוא ישתולל גבוה פי ארבעה מההסתברות שרק ביום השני הוא לא ישתולל.

א. חשב את ההסתברות שארצ'י ישתולל בכל אחד משלושת הימים.

ב. ידעו שארצ'י השתולל רק פעם אחת בכל תקופת המעקב.
חשב את ההסתברות שהשתולל רק ביום השלישי.

פרק שני – יש לענות על שאלה אחת מבין השאלות 4-5



4. המשולש ABC הוא שווה צלעות. הנקודות D ו- E

נמצאות על הצלעות BC ו- AC כך ש- $DC = AE$

א. הוכח: $\Delta ACD \cong \Delta BAE$.

ב. חשב את הזווית DFE.

ג. הוכח שהמרובע CDFE בר חסימה במעגל.

ד. הוכח: $\measuredangle DFC = \measuredangle DEC$

5. מעגל חוסם משולש ישר זווית שבו חסום מעגל נוסף.

מצא את זוויות המשולש אם היחס בין רדיוס המעגל החוסם לרדיוס המעגל החסום הוא $\frac{13}{4}$

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 6-8.

6. א. הוכח את הזהות: $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

3) היעזר בסעיף א' ומצא את נקודות הקיצון בתחום הנתון.

4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ג. מצא את ערכי m עבורם אין פתרון למשוואה $f(x)=m$ בתחום הנתון.

ד. מצא את ערך של m עבורו הישר $y=m$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בדיוק בשלוש נקודות בתחום הנתון.

ה. עבור הערך של m שמצאת בסעיף ד', חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y=m$, ציר ה- x והישר $x=\frac{5\pi}{4}$ בתחום $0\le x\le\frac{5\pi}{4}$

7. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=ax^2$, $a>0$ ו- $g(x)=\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$, $b>0$.

א. מצא את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

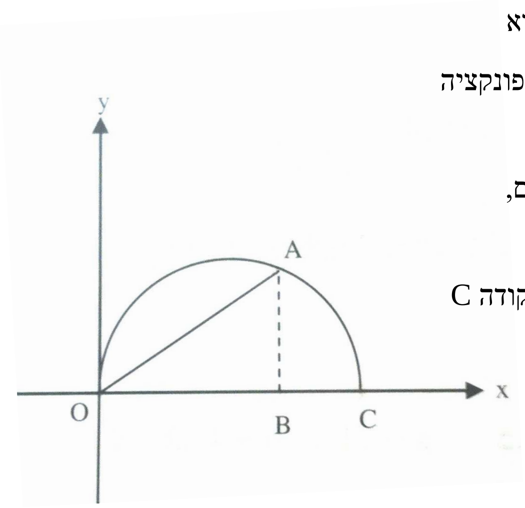
ב. הבע באמצעות b אסימפטוטות (אם יש כאלה) של הפונקציה $g(x)$ המקבילות לצירים.

ג. הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בשתי נקודות בלבד. שרטט, במערכת צירים אחת, סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. נתון כי אחת מנקודות החיתוך שבין הגרפים של שתי הפונקציות היא ב- $x=1$ וכן נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות הוא $\frac{5}{3}-\sqrt{2}$. חשב את ערכי הפרמטרים a ו- b.

8. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax^2+bx}$, $a\cdot b<0$. הנקודה C היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x. מנקודה כלשהי על גרף הפונקציה מורידים אנך לציר ה- x. נתון כי, מבין כל המשולשים שקודקודיהם: הנקודה הנ"ל, נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה- x וראשית הצירים, המשולש ABO שבציור, הנו המשולש בעל השטח המקסימאלי.

נתון גם כי: שיעור ה- x של הנקודה B קטן ב- 1 משיעור ה- x של נקודה C ושיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A הוא $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.



א. מצא את a ו- b.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הראה שהמשולש ABO הוא אכן בעל השטח המקסימאלי מבין המשולשים המתקבלים באופן זה.

ד. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A חותך את ציר ה- x בנקודה D. מצא את משוואת המשיק והראה שהמשולש AOD הנו משולש שווה שוקים.

בהצלחה !

1. p_1 - מספר המתנות שמכין אופיר בשעה , p_2 - מספר המתנות שמכין ליאור בשעה .

W - מספר המתנות שמכין ליאור בחנוכה.

$\frac{W+25}{p_1}=\frac{W}{p_2}$ - זמן ההכנה של ליאור וזמן ההכנה של אופיר בחנוכה זהה.

$\frac{W+25}{p_2}=4\frac{W}{p_1}$ - זמן העבודה של ליאור בסוכות גדול פי 4 מזמן ההכנה של אופיר.

$\frac{p_1}{p_2}=\frac{W+25}{W} \Rightarrow \frac{W+25}{p_1}=\frac{W}{p_2}$ ו- $\frac{p_1}{p_2}=\frac{4W}{W+25} \Rightarrow \frac{W+25}{p_2}=4\frac{W}{p_1}$.

נשווה בין שני הביטויים ונקבל $\frac{4W}{W+25}=\frac{W+25}{W} \Rightarrow 4W^2=(W+25)^2$.

נוציא שורש ונקבל $W+25=\pm 2W \Rightarrow W=25$. כמובן שאת התשובה השלילית פסלנו.

א. אופיר מכין 50 מתנות בחנוכה וליאור מכין 25 מתנות לחנוכה.

ב. נחזור לאחת מהשוואות ונקבל $\frac{p_1}{p_2}=\frac{W+25}{W}=2$. כלומר, קצב העבודה של אופיר גדול פי 2.

לכן נקבל ש- $t_1:t_2=0.5$ (זמן ההכנה של מתנה נמצא ביחס הפוך להספק).

2. א. נסמן את מנת הסדרה של A_n ב- q. ואת האיבר הראשון שלה ב- a_1

$C_{n+1}=\left(A_{n+1}\right)^2 \Rightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n}=\frac{\left(A_{n+1}\right)^2}{\left(A_n\right)^2}=\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)^2=q^2$. קבלנו ש - C_n היא סדרה הנדסית.

כל איבריה עדין חיובים. המנה של הסדרה $0<q^2<1$ לכן זו סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

$B_{n+1}=A_{n+2}\cdot A_{n+4} \Rightarrow \frac{B_{n+1}}{B_n}=\frac{A_{n+2}\cdot A_{n+4}}{A_{n+1}\cdot A_{n+3}}=\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\cdot\frac{A_{n+4}}{A_{n+3}}=q^2$. קבלנו סדרה הנדסית

כל איבריה עדין חיובים. המנה של הסדרה $0<q^2<1$ לכן זו סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

ב. האיבר הראשון של C_n הוא $C_1=a_1{}^2$. האיבר הראשון של B_n הוא $B_1=a_2\cdot a_4=a_1{}^2q^4$.

סכום הסדרה של C_n : $S_C=\frac{a_1{}^2}{1-q^2}$. סכום הסדרה של B_n : $S_B=\frac{a_1{}^2q^4}{1-q^2}$.

$\frac{S_C}{S_B}=\frac{1}{q^4}=16 \Rightarrow q=\frac{1}{2}$. מנת הסדרה המקורית A_n היא 0.5 .

ג. נגדיר את האיבר האחרון שהתלמיד לא מוחק בתור a_{2n+1} .

כלומר מתקבלת סדרה הנדסית סופית שאיבריה הם: $a_1 , a_2 , a_3 \ \ , a_{2n+1}$. האיבר האמצעי בסדרה זו הוא a_{n+1} .

לפי הנתון - $a_1 = 4a_{n+1} \Rightarrow a_1 = 4a_1(q)^n \Rightarrow 1 = 4(0.5)^n \Rightarrow 0.5^n = 0.5^2 \Rightarrow n = 2$.

כלומר בסדרה של האיברים שלא נמחקו יש 5 איברים.

3. נחשב את ההסתברות שארצ'י משתולל רק ביום השני - $P_1 = (1-p)(1-p-0.3)(1-p-0.1)$

נחשב את ההסתברות שארצ'י לא משתולל רק ביום השני - $P_2 = p(1-p-0.1)(1-p-0.3)$

לפי הנתון - $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1-p}{p} = 4 \Rightarrow p = 0.2$.

א. $P = p(p+0.1)(p+0.1) = 0.018$ - משתולל בכל הימים של המעקב.

ב. $P(B)$ - ארצ'י משתולל רק ביום אחד. $P(A)$ -ארצ'י השתולל רק ביום השלישי

$$P(B) = p(1-p-0.1)(p+0.3) + (1-p)(1-p-0.3)(1-p-0.1) + (1-p)(p+0.3)(1-p-0.3) = 0.55$$

$P(A) = (1-p)(p+0.3)(1-p-0.3) = 0.2$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.55} = \frac{4}{11} = 0.3636$$

4. א. $AC = BC$ (נתון ABC משולש שווה צלעות).

$DC = AE$ (נתון)

$\prec A = \prec C = 60^0$ (זוויות במשולש שווה צלעות שוות ל- 60 מעלות

$\Delta ACD \cong \Delta BAE$ (לפי צ.ז.צ)

ב. נסמן $\prec ABE = \alpha$. $\prec ABE = \prec CAD = \alpha$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה).

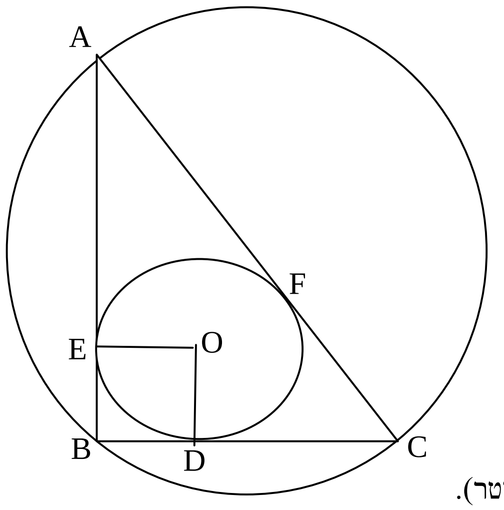
$\prec BAF = 60 - \alpha$ (חיסור זוויות).

$\prec AFB = 180 - \alpha - (60 - \alpha) = 120^0$. (סכום זוויות ב- ΔAFB שווה ל- 180 מעלות).

$\prec AFB = \prec EFD = 120^0$ (זוויות קודקודיות).

ג. $\prec EFD + \prec ECD = 120^0 + 60^0 = 180^0$ (אם זוג זוויות נגדיות במרובע שווה ל - 180^0 ניתן לחסום את המרובע במעגל).

ד. אם נצייר את המעגל שחוסם את המרובע נראה שהזוויות $\prec DEC$, $\prec DFC$ הם זוויות היקפיות שנשענות על הקשת DC. מכאן - $\prec DFC = \prec DEC$ (זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת שוות).



5. $\measuredangle ABC = 90^0$ (נתון משולש ישר זווית)

נגדיר את O להיות מרכז המעגל החסום.

$\measuredangle BEO = 90^0$ - זווית בין משיק לרדיוס שווה ל- 90 מעלות

באותו אופן גם $\measuredangle BDO = 90^0$.

קבלנו שבמרובע שלוש זוויות שווה ל- 90 מעלות לכן

$BEOD$ הוא מלבן. $EO = DO$ (רדיוסים במעגל החסום).

לכן התקבל ש- $BEOD$ הוא ריבוע ולכן $BE = BD = r$.

נגדיר $\measuredangle A = \alpha$. $\measuredangle B = 90^0$ והיא זווית היקפית במעגל החוסם

לכן $AC = 2R$ (זווית היקפית ששווה ל- 90 מעלות נשענת על קוטר).

נתבונן במשולש ΔABC - $\frac{BC}{2R} = \sin\alpha \Rightarrow BC = 2R\sin\alpha$, $\frac{AB}{2R} = \cos\alpha \Rightarrow AB = 2R\cos\alpha$.

$AE = EF$, $FC = DC$ (שני משיקים שיוצאים מאותה נקודה שווים).

$AE = EF = 2R\cos\alpha - r$ $\quad FC = DC = 2R - 2R\cos\alpha + r$ (חיסור קטעים)

מצד שני $FC = DC = 2R\sin\alpha - r$ לכן ניתן לקבל $2R - 2R\cos\alpha + r = 2R\sin\alpha - r$.

נחלק ב- 2R, נציב את הנתון $\frac{R}{r} = \frac{13}{4}$ ונקבל $\frac{17}{13} = \sin(90-\alpha) + \sin\alpha \Rightarrow 1 + \frac{4}{13} = \cos\alpha + \sin\alpha$

נשתמש בזהות של חיבור סינוסים - $\frac{17}{13} = 2\sin 45\cos(45-\alpha) \Rightarrow 45 - \alpha = 22.38 \Rightarrow \alpha = 22.62$.

מכאן ניתן להסיק כי זוויות המשולש הם - 67.38^0, 90^0 , 22.62^0

6. א. $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$

ב. 1) $\cos x + \sin x \neq 0 \Rightarrow \tan x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$. הפתרונות בתחום - $x \neq \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

2) $f(0) = 1$, $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$.

הפתרונות בתחום - $\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{\pi}{4}, 0\right), (0,1)$. כאשר את התשובות שמתנגשות הם התחום הגדרה זרקנו.

3) ניתן לגזור את הפונקציה $f(x) = \cos x - \sin x$ - $f'(x) = -\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = -1$.

נקודות הקיצון הפנימיות מתקבלות בנקודות שהפונקציה לא מוגדרת. מכאן שאין נקודות קיצון פנמיות.

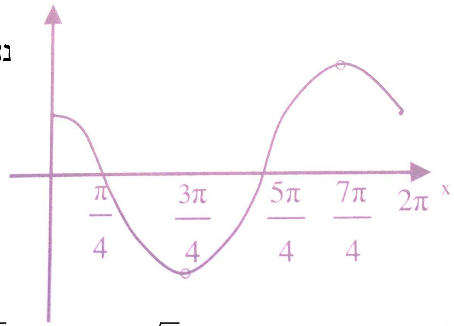
נקודות קיצון של קצה קטע - $(2\pi, 1)\min$, $(0,1)\max$.

כמובן שהנקודות שהפונקציה לא מוגדרת הן נקודות סליקה (חור). נקודות אלה מאפסות,באותה מידה, גם את המונה וגם את המכנה.

נמצא את ערכי ה- y של החור ונוכל לאפיין את נקודות הקיצון.

4) נחשב את ערכי החור- $f(\frac{3}{4}\pi)=-\sqrt{2}$.

$f(\frac{7}{4}\pi)=\sqrt{2}$



ג. על פי השרטוט מתקבל $m\geq\sqrt{2}\ \ or\ \ m\leq-\sqrt{2}$

ד. לפי השרטוט ניתן לראות ש - $m=1$

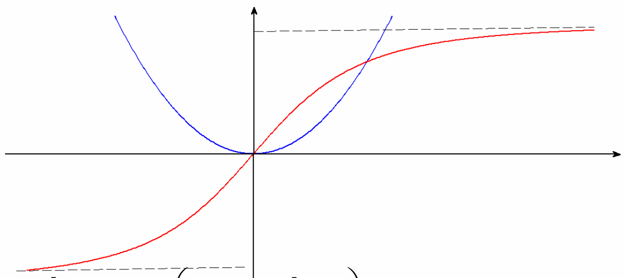
ה. $S=\int_0^{5\pi/4}1dx-\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx=x\Big|_0^{5\pi/4}+\left(-\sin x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{5\pi}{4}+1-\sqrt{2}=3.51$

7. א. $g'(x)=\dfrac{b\sqrt{x^2+1}-bx\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{b(x^2+1)-bx^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{b}{positive}>0$.

הפונקציה מוגדרת לכל x . מכאן שהפונקציה עולה לכל x.

ב. $y=\lim_{x\to-\infty}\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{bx}{|x|}=-b\quad,\quad y=\lim_{x\to\infty}\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{bx}{|x|}=b$.

ג.



ד. נשווה בין שתי הפונקציות - $ax^2=\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow x\left(ax-\frac{b}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0$ ונציב לפי הנתון $x=1$

ונקבל $a-\frac{b}{\sqrt{2}}=0\Rightarrow b=\sqrt{2}a$. שיעור ה- x של נקודת החיתוך הנוספת הוא $x=0$.

לפי הציור ניתן לראות שהשטח המבוקש הוא

$$S=\int_0^1 (g(x)-f(x))dx=\int_0^1 \frac{\sqrt{2}ax}{\sqrt{x^2+1}}dx-\int_0^1 ax^2dx=a\sqrt{2(x^2+1)}-a\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=2a-\frac{1}{3}a-\sqrt{2}a$$

ולפי הנתון מתקבל $a=1 \Rightarrow \frac{5}{3}a-\sqrt{2}a=\frac{5}{3}-\sqrt{2}$. מכאן ש - $a=1\,,\,b=\sqrt{2}$.

כאשר נעזרנו ב- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2+1}+C$ $(t=x^2+1\,,\,dt=2xdx)$

8. א. נקרא לנקודה כללית על גרף הפונקציה - $\left(t,\sqrt{at^2+bt}\right)$.

מכאן ששטח המשולש שנוצר באופן המתואר הוא $S=\frac{t\sqrt{at^2+bt}}{2}$.

נמצא את שטח המשולש המקסימאלי $S'=\frac{\sqrt{at^2+bt}}{2}+\frac{t(2at+b)}{4\sqrt{at^2+bt}}=0 \Rightarrow 2(at^2+bt)+2at^2+bt$

ומכאן נקבל ש- $t(4at+3b)=0 \Rightarrow t=-\frac{3b}{4a}$.

נמצא את שיעור הנקודה C : $\sqrt{ax^2+bx}=0 \Rightarrow x_C=-\frac{b}{a}$.

נתון כי - $x_C=x_A+1 \Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{3}{4}\frac{b}{a}+1 \Rightarrow b=-4a$. מכאן ש- $t=3$

$f'(x)=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx}}=\frac{2ax-4a}{2\sqrt{ax^2-4ax}}$. נתון $f'(t)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

לכן $f'(3)=\frac{6a-4a}{2\sqrt{9a-12a}}=\frac{a}{\sqrt{-3a}}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a=-1$. מכאן ש - $b=4$.

ב. תחום הגדרה של הפונקציה $f(x)=\sqrt{-x^2+4x}$ - $-x^2+4x\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 4$

ג. $S'=\frac{\sqrt{-t^2+4t}}{2}+\frac{t(-2t+4)}{4\sqrt{-t^2+4t}}=\frac{-4t^2+12t}{4\sqrt{-t^2+4t}}=\frac{-t^2+3t}{\sqrt{-t^2+4t}}=\frac{-t^2+3t}{positive}$.

ניתן לגזור רק את המונה $S''=-2t+3$. מכאן ש- $S''(3)=-3<0 \Rightarrow \max$

ד. נקודת ההשקה A - $(3,\sqrt{3})$ והשיפוע - $m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

משוואת המשיק היא $y-\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3) \Rightarrow y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}$.

נקודה D : $x = 6 \Rightarrow 0 = -\frac{x}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$ לכן $(6,0)$.

נחשב את האורך AO - $d = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{12}$.

נחשב את האורך AD - $d = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{12}$.

מכאן שהמשולש AOD הוא משולש שווה שוקים.