

מתכונת במתמטיקה 5- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 50 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. אוניברסיטה בהונגריה יש שני מסלולים מזורזים להכשרת רופאים: מסלול א' ומסלול ב'. בשל מחסור ברופאים בישראל, האוניברסיטה פתחה תוכנית להכשרה מיידית של מספר רופאים מסוים. שני המסלולים היו פעילים יחדיו וכתוצאה מכך האוניברסיטה עמדה בדרישה תוך 40 שבועות. אם מסלול א' יכשיר $\frac{3}{8}$ מכמות הרופאים שהכשיר מסלול ב' עבור התוכנית ומסלול ב' יכשיר 0.2 מכמות הרופאים שהכשיר מסלול א' עבור התוכנית, מסלול א' יהיה פעיל שבועיים יותר ממסלול ב'. אם מסלול א' יכשיר 20% מכמות הרופאים שהוא הכשיר עבור התוכנית ומסלול ב' יכשיר 62.5% מכמות הרופאים שהוא הכשיר עבור התוכנית, יכשירו המסלולים בסך הכול 700 רופאים.
- א. מצא כמה רופאים בשבוע מכשירים כל אחד מהמסלולים (קצב העבודה של כל אחד מהמסלולים קבוע).
- ב. בכמה שבועות מבצע כל אחד מהמסלולים לבד את התוכנית?

2. סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = -2n^2 + 5n + c$

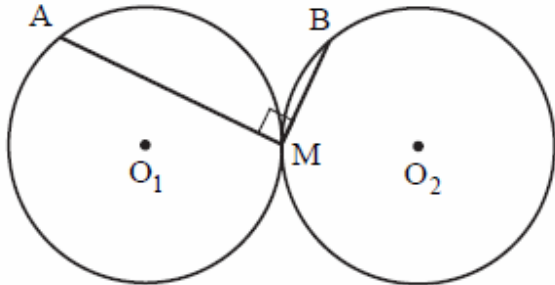
א. לאיזה ערך של c הסדרה היא סדרה חשבונית? נמק.

ב. עבור הערך של c שמצאת בסעיף א',

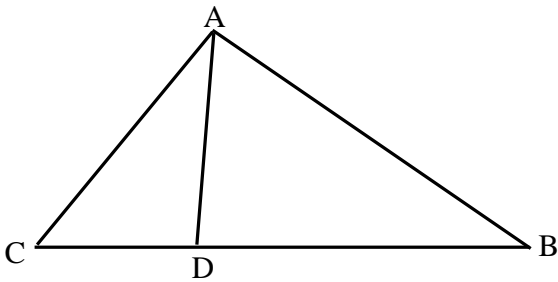
(1) חשב את הסכום $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{26}$ (2) חשב את סכום האיברים הגדולים מ-200

3. בבית ספר מסוים ניגשו תלמידי שכבת יא' למבחן מתכונת במתמטיקה ואחר כך למבחן בגרות. מספר התלמידים שנכשלו במבחן המתכונת והצליחו במבחן הבגרות היה שווה למספר התלמידים שהצליחו במבחן המתכונת ונכשלו במבחן הבגרות.
- נתון כי אחוז הנכשלים בבחינת המתכונת מתוך 500 תלמידי השכבה הוא 20%. כמו כן ידוע כי אם תלמיד הצליח במבחן המתכונת, ההסתברות שהוא יצליח בבחינת הבגרות היא 0.9.
- א. חשב את מספר התלמידים בשכבה שנכשלו בבחינת המתכונת והצליחו בבחינת הבגרות.
- ב. נבחר תלמיד באקראי וידוע כי הוא נכשל בבחינת הבגרות מה ההסתברות לכך שהתלמיד הצליח במבחן המתכונת?
- ג. מה ההסתברות לבחור תלמיד שהצליח במבחן הבגרות או/ו במבחן המתכונת.

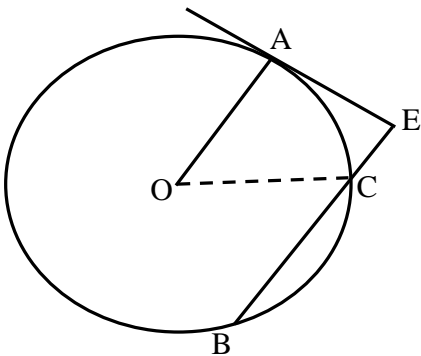
פרק שני – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 4-6.



4. שני מעגלים, שיש להם אותו רדיוס R, משיקים זה לזה בנקודה M. מעבירים מיתר MB במעגל שמרכזו O_2 , ומיתר MA במעגל שמרכזו O_1 כך ש- $\angle AMB = 90^\circ$ (ראה ציור).
 א. (1) נמק מדוע $\angle O_1MO_2 = 180^\circ$ (2) הוכח כי $AO_1 \parallel BO_2$.
 ב. במשולש AMB העבירו תיכון לצלע AB. הבע באמצעות R את אורך התיכון. נמק.



5. במשולש ABC, נקודה D על BC כך ש: $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}$. נתון: $\angle BAD = \beta$, $\angle CAD = \alpha$.
 א. הבע ע"י α ו- β את היחס $\frac{AB}{AC}$.
 ב. נתון: $\beta = \alpha - 15$, $\frac{AB}{AC} = \sqrt{6}$. מצא את α .



6. בנקודה A על מעגל שמרכזו O מעבירים משיק למעגל. המיתר BC מקביל ל- AO וחותך את המשיק בנקודה E. נתון: $AE = 8\text{ cm}$, $CE = 4\text{ cm}$.
 א. חשב את רדיוס המעגל.
 ב. חשב את הזווית AOC.

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 7-9.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x - x^2}{x^2 - ax + 12}$. לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מצא את a ואת האסימפטוטה האנכית (a שלם).

ב. הצב בפונקציה את a שקיבלת ומצא: תחום הגדרה, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים ואסימפטוטה אופקית.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הפונקציה $g(x) = f'(x)$. בנקודה $x = 2$ העבירו משיק לפונקציה $g(x)$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, המשיק וציר ה- y .

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{\sin x} \cos^2 x$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. (1) עבור אילו ערכי ה- x הפונקציה מוגדרת.

(2) מצא בתחום הנתון את נקודות הקיצון של הפונקציה, ואפיין אותן.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ג. מנקודות המקסימום של הפונקציה בתחום הנתון מורידים אנכים לציר ה- x . השטח המוגבל בתחום הנתון בין גרף הפונקציה, שני האנכים וציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר במקרה זה.

9. נתון כי המרחק בין יישוב A ליישוב B הוא d ק"מ (d הוא קבוע).

רוכב האופניים יצא בשעה מסוימת מיישוב A ליישוב B, ורכב מהירות

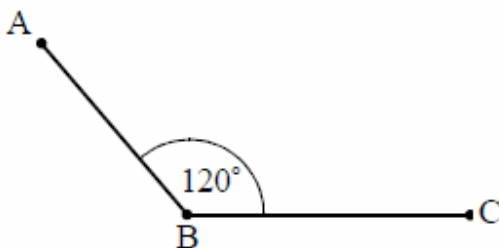
קבועה של 10 קמ"ש. באותה שעה יצא מיישוב B רוכב אופניים שני שרכב

ליישוב C במהירות קבועה של 12 קמ"ש.

נתון כי הזווית ABC היא 120° מעלות (ראה ציור).

ידוע כי המרחק בין הרוכבים יהיה מינימאלי כעבור 2.5 שעות לרכיבתם.

(לפני שהרוכב מ-A יגיע ל-B). מצא את המרחק שבין יישוב A ליישוב B.



בהצלחה !

1. א. n- מספר רופאים שמכשירים בסה"כ בתוכנית.

p_1 - מספר רופאים לשבוע שמכשירים במסלול א'

p_2 - מספר רופאים לשבוע שמכשירים במסלול ב'

$$40(p_1 + p_2) = n$$

$$\text{נבנה משוואה של הפרש זמנים} \quad 2 = 0.2 \cdot \frac{40p_1}{p_2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{40p_2}{p_1} \cdot \text{נגדיר } x = \frac{p_1}{p_2} \text{ ומכאן נקבל}$$

$$1.25, x = -1.5 \Rightarrow -8x^2 - 2x + 15 = 0 \Rightarrow 8x = 2 - \frac{15}{x} \text{ כמובן שאת התשובה השלילית נפסול.}$$

$$\text{כלומר, } p_1 = 1.25p_2 \Rightarrow x = \frac{p_1}{p_2} = 1.25 \text{ . המשואה האחרונה היא } 0.2 \cdot 40p_1 + 0.625 \cdot 40p_2 = 700$$

$$8p_1 + 25p_2 = 700 \Rightarrow 10p_2 + 25p_2 = 700 \Rightarrow p_2 = 20, p_1 = 25$$

במסלול א' מכשירים 25 רופאים בשבוע, ובמסלול ב' מכשירים 20 רופאים בשבוע.

ב. נציב את ההסקקים למשוואה הראשונה ונקבל $40(p_1 + p_2) = n \Rightarrow n = 1800$

$$t_1 = \frac{n}{p_1} = \frac{1800}{25} = 72, t_2 = \frac{n}{p_2} = \frac{1800}{20} = 90$$

מסלול א' מבצע את התוכנית תוך 72 שבועות ומסלול ב' תוך 90 שבועות.

$$2. \text{ א. } S_{n-1} = -2(n-1)^2 + 5(n-1) + c = -2n^2 + 4n - 2 + 5n - 5 + c = -2n^2 + 9n - 7 + c$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n = -2n^2 + 5n + c + 2n^2 - 9n + 7 - c = -4n + 7 \Rightarrow a_n = -4n + 7$$

$$n \text{ נראה שמדובר בסדרה חשבונית: } a_{n+1} - a_n = -4n + 3 - (-4n + 7) = -4 = d$$

$$S_n = \frac{n}{2} [6 - 4(n-1)] = 5n - 2n^2 \text{ . האיבר הראשון שווה ל- } a_1 = 3 \text{ ולכן הסכום שווה ל-}$$

אם נשווה לנתון נקבל ש- $c = 0$

ב. (1) ההפרשים הם $2d = -8$ והאיבר הראשון הוא $a_2 = -1$. יש בסה"כ 13 איברים.

$$S_{13} = \frac{13}{2} [-2 - 8(13-1)] = -637$$

(2) נמצא את המיקום של האיבר הראשון שקטן מ-200 : $-200 = 3 - 4(n-1) \Rightarrow n = 51.75$

$$\text{כלומר צריך לסכום את 51 האיברים הראשונים: } S_6 = \frac{51}{2} [6 - 4(51-1)] = -4947$$

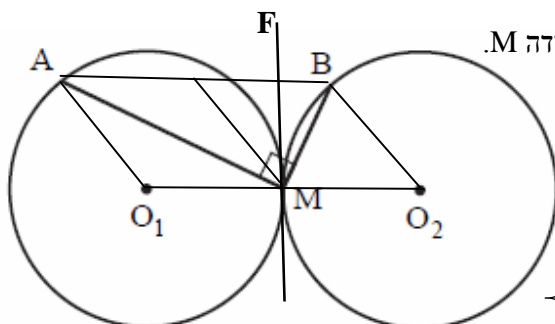
	נכשל במתכונת \bar{A}	הצליח במתכונת A	
0.8	x	0.8-x	הצליח בבגרות B
0.2	0.2-x	x	נכשל בבגרות \bar{B}
1	0.2	0.8	

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.8-x}{0.8} = 0.9 \Rightarrow x = 0.08$$

א. מספר התלמידים שנכשלו במתכונת והצליחו בבגרות $500 \cdot 0.08 = 40$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4 \quad \text{ב.}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.8 - 0.72 = 0.88 \quad \text{ג.}$$



4. א. (1) בניית עזר: להעביר משיק MF המשותף לשני המעגלים דרך הנקודה M.

$$\angle O_1MF = 90^\circ \quad (\text{זווית בין משיק לרדיוס שווה ל-} 90^\circ \text{ מעלות}).$$

$$\angle O_2MF = 90^\circ \quad (\text{זווית בין משיק לרדיוס שווה ל-} 90^\circ \text{ מעלות}).$$

$$\angle O_1MO_2 = \angle O_1MF + \angle O_2MF = 90 + 90 = 180^\circ \quad (\text{חיבור זוויות}).$$

$$(2) \text{ נגדיר } \angle AMF = \alpha, \angle AMB = 90^\circ \quad (\text{נתון}) \text{ לכן } \angle BMF = 90 - \alpha$$

$$\angle AO_1M = 2\alpha \quad (\text{זווית היקפית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית שנשענת על אותו מיתר} + \text{זווית}$$

היקפית שווה למחצית מהזווית המרכזית שנשענת על אותו מיתר)

$$\angle BO_2M = 180 - 2\alpha \quad (\text{זווית היקפית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית שנשענת על אותו מיתר} +$$

זווית היקפית שווה למחצית מהזווית המרכזית שנשענת על אותו מיתר)

$$\angle BO_2M + \angle AO_1M = 180 - 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

$$AO_1 \parallel BO_2 \quad (\text{אם סכום זוויות חד צדדיות שווה ל-} 180^\circ \text{ מעלות אז הישרים מקבילים})$$

$$AO_1 = BO_2 = R \quad (\text{רדיוסים במעגלים זהים})$$

ABO_1O_2 מקבילית (מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקביל ושווה הוא מקבילית).

$$O_1O_2 = AB = 2R \quad (\text{צלעות נגדיות במקבילית שוות}).$$

התיכון שווה ל- R ($\triangle ABM$ משולש ישר זווית, התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית מהיתר).

5. א. נגדיר $\sphericalangle ADB = \gamma$ ולכן $\sphericalangle ADC = 180 - \gamma$ (זוויות צמודות).

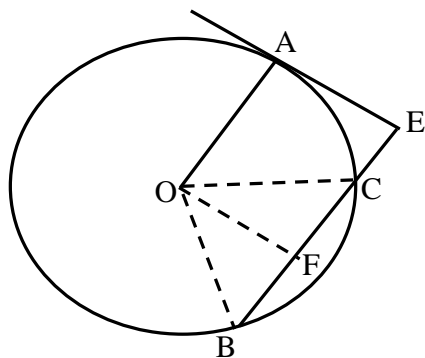
נגדיר $CD = x$ לכן $DB = 2x \Rightarrow CB = 3x$ (חיסור קטעים + נתון $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}$).

$$\frac{AC}{\sin(180 - \gamma)} = \frac{x}{\sin \alpha} \Rightarrow AC = \frac{x \sin \gamma}{\sin \alpha} : \triangle ACD$$

$$\frac{AB}{\sin(\gamma)} = \frac{2x}{\sin \beta} \Rightarrow AB = \frac{2x \sin \gamma}{\sin \beta} : \triangle ABD$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin \beta}$$

ב. $\frac{AB}{AC} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin(\alpha - 15)} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{6}} \sin \alpha = \sin \alpha \cos 15 - \cos \alpha \sin 15 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$



6. בניית עזר: נעביר רדיוס OB וגובה OF במשולש BOC. (ראה ציור)

נתון AE משיק למעגל \Leftrightarrow זווית OAE שווה ל-90 מעלות (זווית בין רדיוס למשיק שווה ל-90 מעלות).

זווית OFE שווה ל-90 (גובה OF – מאונך ל-BC).

$\sphericalangle AOF = \sphericalangle OFE = 90^\circ$, $\sphericalangle OAE = \sphericalangle AEC = 90^\circ \Leftrightarrow AO \parallel BE$ (נתון)

(זוויות חד צדדיות שוות בין ישרים מקבילים).

מרובע AOFE הוא מלבן (מרובע שבו כל הזוויות שוות ל-90 מעלות הוא מלבן).

$AE = OF = 8\text{ cm}$ (זוג צלעות נגדיות במלבן שוות).

$AE^2 = EC \cdot BE \Rightarrow BE = 16\text{ cm}$ (אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך

בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק + הצבת נתונים $AE = 8\text{ cm}, CE = 4\text{ cm}$).

$BE - CE = BC = 12\text{ cm}$ (חיסור קטעים).

$OC = OB$ (רדיוסים במעגל) $\Leftrightarrow \triangle OBC$ משולש שווה שוקים (זוג צלעות שווה במשולש לכן מש"ש).

OF גובה במש"ש לכן $BF = FC = 6\text{ cm}$ (במש"ש גובה לבסיס הוא גם תיכון).

נסתכל ב- $\triangle OFC$ - משולש ישר זווית - $OC = R = \sqrt{CF^2 + OF^2} = 10\text{ cm}$ (משפט פיתגורס).

$$\frac{FC}{OF} = \tan \sphericalangle FOC \Rightarrow \sphericalangle FOC = 36.87^\circ$$

$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOF - \sphericalangle FOC = 90 - 36.87 = 53.13^\circ$ (חיסור זוויות).

7. א. יש לדרוש שהמכנה יתאפס רק פעם אחת $\Delta = a^2 - 48 \Rightarrow a = \pm 6.928$ (א לא מספר שלם).

אופציה נוספת זה שהמונה והמכנה מתאפסים באותה נקודה (חור ולא אסימפטוטה).

האפשרויות לאיפוס המונה הם $x = 4, 0$ (לא מאפס את המכנה). לכן רק $x = 4$ מאפס את המונה וגם את

המכנה עבור $a = 7$.

במקרה זה $f(x) = \frac{4x - x^2}{x^2 - 7x + 12}$. המכנה מתאפס כאשר $x = 3, x = 4$, $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4, x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(4-x)}{(x-3)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x}{x-3} = -4 \quad \text{מדובר בחור.}$$

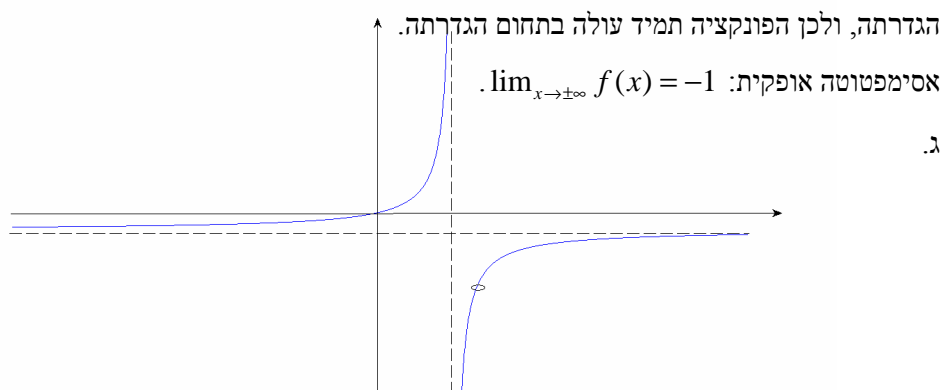
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(4-x)}{(x-3)(x-4)} = \pm\infty \quad \text{מדובר באסימפטוטה אנכית.}$$

ב. תחום הגדרה: $x \neq 4, 3$. חיתוך עם ציר ה- y : $(0,0)$. חיתוך עם ציר ה- x : $(0,0)$.

תחומי עלייה ירידה:

$$f'(x) = \frac{(4-2x)(x^2-7x+12) - (2x-7)(4x-x^2)}{(x^2-7x+12)^2} = \frac{3(x^2-8x+16)}{(x^2-7x+12)^2} = \frac{3(x-4)^2}{(x^2-7x+12)^2} = \frac{3}{(x-3)^2}$$

נשווה את הנגזרת ל-0 ונקבל $x = 4$. נפסל בגלל תחום הגדרה. ניתן לראות שהנגזרת תמיד חיובית בתחום



7. נמצא את משוואת המשיק: $f''(x) = \frac{-6}{(x-3)^3}$ לכן $m = f''(2) = \frac{-6}{(2-3)^3} = 6$

נקודת ההשקה היא $(2,3)$ ולכן משוואת המשיק $y = 6x - 9$

ניתן להבין שבין $0 < x < 2$ הפונקציה $g(x)$ נמצאת מעל המשיק לכן

$$S = \int_0^2 (g(x) - y) dx = f(2) - f(0) - 3x^2 + 9x \Big|_0^2 = 2 - 0 + 6 - 0 = 8$$

8. א. $\sin x \geq 0$ ומהכרות עם הפונקציה סינוס זה קורה עבור $0 \leq x \leq \pi$.

$$f'(x) = \frac{\cos^3 x}{2\sqrt{\sin x}} - 2 \sin x \sqrt{\sin x} \cos x = \frac{\cos^3 x - 4 \sin^2 x \cos x}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x (\cos^2 x - 4 \sin^2 x)}{2\sqrt{\sin x}} \quad (2)$$

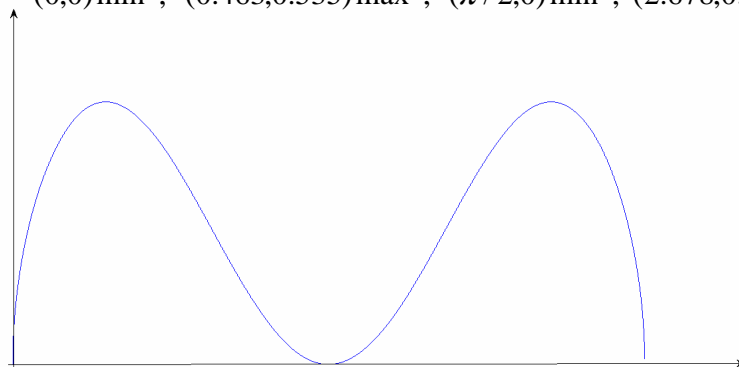
$$\cos^2 x = 4 \sin^2 x \Rightarrow \tan x = \pm 0.5 \Rightarrow x = 0.463, x = 2.678 \quad \text{או} \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad y' = 0$$

כמובן שיש גם את קצה הקטע $(0,0)$ ו- $(\pi,0)$.

בעזרת הצבה של ערכים לנגזרת מתקבל -

$$(0,0) \text{ min}, (0.463, 0.535) \text{ max}, (\pi/2, 0) \text{ min}, (2.678, 0.535) \text{ max}, (\pi, 0)$$

ב.



$$t = \cos x, \sin x dx = -dt \quad V = \pi \int_{0.462}^{2.678} (\cos^4 x \sin x) dx \quad \text{ג. יש להשתמש בשיטת ההצבה}$$

$$V = \frac{\pi}{5} (-\cos^5 x) \Big|_{0.462}^{2.678} = 0.72 \quad \text{ולכן} \quad -\int t^4 dt = \frac{-t^5}{5}$$

9. x_1 - המרחק של הרוכב שיצא מ-A לנקודה B. x_2 - המרחק של הרוכב שיצא מ-B לנקודה C.

x - המרחק בין רוכבי האופנים כפונקציה של הזמן.

$$x_1 = d - 10t \quad \text{ו-} \quad x_2 = 12t \quad \text{על מנת למצוא את המרחק בין הרוכבים נשתמש במשפט הקוסינוסים:}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos 120 = x^2 \Rightarrow x^2 = (d - 10t)^2 + (12t)^2 + (d - 10t)(12t)$$

נגזור את x^2 ונמצא את המינימום של הפונקציה:

$$2x \cdot x' = -20(d - 10t) + 24(12t) - 120t + 12(d - 10t) = 0 \Rightarrow 248t = 8d \Rightarrow t = \frac{d}{31}$$

נאפיין את הנקודה - $x'' = 248 > 0 \Rightarrow \text{min}$.

$$t_{\min} = 2.5 = \frac{d}{31} \Rightarrow d = x_{AB} = 77.5 \text{ km} \quad \text{נשווה את הזמן המינימאלי שקבלנו לזה שנתון:}$$