מתכונת במתמטיקה 1- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 50 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. שני צינורות מספקים מים לבריכה. יום אחד, כשהבריכה הייתה ריקה, פתחו את הצינור הראשון לרבע מהזמן הדרוש למילוי על ידי הצינור השני לבדו ואת הצינור השני פתחו לחצי מהזמן הדרוש למילוי על ידי הצינור הראשון לבדו. הצינורות מילאו $\frac{17}{24}$ מהבריכה. כדי למלא בריכה ריקה יש לפתוח את שני הצינורות למשך 4.8 שעות.

בכמה שעות ממלא כל צינור לבדו את הבריכה ?

2. א. בסדרה הנדסית, שכל איבריה חיובים, נתון כי סכום האיברים הרביעי והחמישי גדול פי 16 מסכום האיברים השני והשלישי. מצא את מנת הסדרה.

ב. אם מוסיפים 9 לאיבר השני, מוסיפים 78 לאיבר השלישי ומפחיתים 12 מהאיבר החמישי מקבלים שלושה מספרים המהווים סדרה הנדסית חדשה. מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.

3. בוחרים באקראי 4 מכוניות. ההסתברות שלכל היותר ל- 3 יש כרית אוויר היא $\frac{80}{81}$.

א. לאיזה אחוז מהמכוניות בארץ יש כרית אוויר ?

ב. מה ההסתברות שמבין 4 המכוניות שנבחרו באקראי ב-3 אין כרית אוויר ובאחת יש?

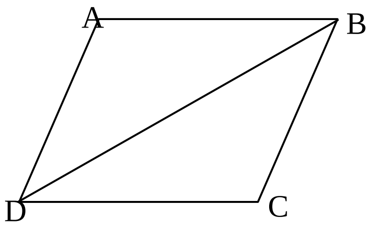
ג. 40% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. ברבע מהמכוניות הלבנות יש כרית אוויר.

בוחרים באקראי שתי מכוניות ומסתבר שיש בהן כרית אוויר. מה ההסתברות שאחת לבנה ואחת לא ?

פרק שני – יש לענות על שאלה אחת מבין השאלות 4-5.

4. במקבילית ABCD, ארוכה הצלע AB ב- m ס"מ מהצלע BC ($m > 0$).

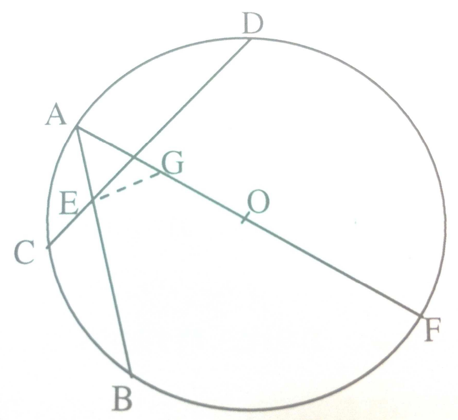
$\sphericalangle BDC = \beta$, $\sphericalangle ADB = \alpha$.



א. הוכח: $BD = \dfrac{m\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}$.

ב. הוכח: $S_{ABCD} = \dfrac{m^2 \sin\alpha \sin\beta \tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}$.

5. במעגל שמרכזו O נחתכים המיתרים AB ו- CD בנקודה E.



נתון: $ED = AB = 16\,cm$, $CE = 3\ cm$.

א. מצא את אורכי הקטעים AE ו- BE ($AE < BE$).

ב. AF הוא קוטר במעגל. הנקודה G היא אמצע AO.

הוכח: $EG \perp AB$.

ג. נתון: $EG = 3cm$. מצא את רדיוס המעגל

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 6-8.

6. לפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+6x-45}{x^2-9}$ יש אסימפטוטה אופקית $y=3$.

א. מצא את a.

ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים ואסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. לאילו ערכים של x מתקיים $\frac{f'(x)}{f''(x)}>0$?

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{6-4x}{\sqrt{x^2-3x}}$.   (151)

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים

ג. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה $x=4$ שעל גרף הפונקציה.

ד. הישר $y=a$ $(a<0)$, הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה. חשב את השטח המוגבל בגרף הפונקציה $f(x)$, במשיק שמצאת ובישרים $y=-a$, $x=15$. יש להיעזר בציור מתאים.

8. במשולש ABC נתון: $BC=8cm$ וסכום הצלעות AB ו- AC הוא $12cm$.

מה גודלה המקסימלי של זווית A ?

בהצלחה !

פתרון:

1. $W=1$ - העבודה למלא את כל הבריכה.

t_1 - הזמן שלוקח לצינור הראשון למלא את כל הבריכה לבדו.

t_2 - הזמן שלוקח לצינור השני למלא את כל הבריכה לבדו.

	p	t	w
צינור 1	$1/t_1$	$t_2/4$	17/24
צינור 2	$1/t_2$	$t_1/2$	
צינור 1+2	$1/t_1+1/t_2$	4.8	1

$$\frac{1}{t_1}\cdot\frac{t_2}{4}+\frac{1}{t_2}\cdot\frac{t_1}{2}=\frac{17}{24} \Rightarrow 6t_2^2+12t_1^2=17t_1t_2 \ ,$$

$$\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)4.8=1 \Rightarrow 4.8t_2+4.8t_1=t_1t_2 \Rightarrow t_2=\frac{4.8t_1}{t_1-4.8}$$

$$6\frac{23.04t_1^2}{(t_1-4.8)^2}+12t_1^2=17\cdot\frac{4.8t_1^2}{(t_1-4.8)} \Rightarrow 138.24+12(t_1-4.8)^2=81.6(t_1-4.8)$$

$$12t_1^2-196.8t_1+806.4=0 \Rightarrow t_1=8h \ , t_1=8.4h$$

נציב חזרה למשואה ונקבל ש- $t_1=8h \ , t_2=12\ h$ או $t_1=8.4h \ , t_2=11.2\ h$

2. א. $a_4+a_5=16(a_2+a_3) \Rightarrow a_1q^3+a_1q^4=16(a_1q+a_1q^2) \Rightarrow a_1q^3(1+q)=16a_1q(1+q)$

מכאן נובע כי $q+1=0 \Rightarrow q=-1 \ , q=0 \ , q^2=16 \Rightarrow q=\pm 4$

מכיוון שכל איברי הסדרה חיובים הפתרון היחידי שמתקבל הוא $q=4$.

ב. היחס קבוע בין האיברים שנוצרו - $\frac{a_3+78}{a_2+9}=\frac{a_5-12}{a_3+78} \Rightarrow (16a_1+78)^2=(256a_1-12)(4a_1+9)$

$256a_1^2+2496a_1+6084=1024a_1^2+2256a_1-108 \Rightarrow 768a_1^2-240a_1-6192=0 \Rightarrow a_1=3$.

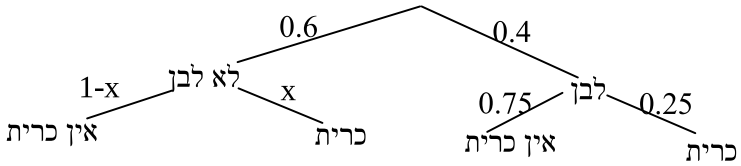
התשובה השנייה של המשואה הריבועית נפסלה מכיוון שהיא שלילית.

3.א. A – המאורע יש כרית אוויר. בעזרת מאורע משלים נקבל $P=(p(A))^4=\frac{1}{81} \Rightarrow p(A)=\frac{1}{3}$.

ל- 33.3% מהמכוניות יש כרית אוויר.

ב. לפי ברנולי נקבל $P=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$.

ג. B - המאורע שהמכונית לבנה



ידוע שלשליש מהמכוניות יש כרית לכן

$$P(A)=P(B)\cdot P(A)+P(\overline{B})\cdot P(A)=\frac{1}{3}$$

$$0.4\cdot 0.25+0.6x=0.333\Rightarrow x=7/18$$

ההסתברות לפעמים לבחור מכונית עם כרית היא $P=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

ההסתברות שיבחרו 2 מכוניות עם כרית כשאחת לבנה ואחת לא -

$P=2\big(0.4\cdot 0.25\cdot 0.6\cdot (7/18)\big)=7/150$.

לפי הנוסחא להסתברות מותניית מתקבל $P=\frac{7/150}{1/9}=0.42$.

4. א. נתון ABCD מקבילית לכן $AB\parallel DC$ (צלעות נגדיות במקבילות מקבילות אחת לשנייה).

$\sphericalangle BDC=\sphericalangle ABD=\beta$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות)

$\sphericalangle A=180-\alpha-\beta$ (סכום זוויות במשולש ADB שווה ל- 180 מעלות).

לפי משפט הסינוסים ב - ΔADB והנתון ש- $AD+m=AB$ נקבל -

$$\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha}\quad\Rightarrow\quad\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AD+m}{\sin\alpha}\quad\Rightarrow AD=\frac{m\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}.$$

נשתמש שוב במשפט הסינוסים באותו משולש - $\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{DB}{\sin(180-\alpha-\beta)}\Rightarrow DB=\frac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha-\sin\beta}$

נשתמש בנוסחאות להפרש ובזווית כפולה ונקבל $DB=\frac{2m\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}{2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}=\frac{m\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}$

ב. $AB=DC$, $AD=BC$ (צלעות נגדיות במקבילית שוות). בנוסף DB צלע משותפת לכן לפי צ.צ.צ

מתקבל $\Delta ADC\cong\Delta CBD$. כלומר, המשולשים הם גם שווי שטח.

$$S_{ABCD}=2S_{ADB}=AD\cdot DB\sin\alpha=\frac{m\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}\cdot\frac{m\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}\sin\alpha=\frac{m^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin^2(\frac{\alpha-\beta}{2})}\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$S_{ABCD}=\dfrac{m^2\sin\alpha\sin\beta\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2\sin^2(\frac{\alpha-\beta}{2})}$ (כאשר השתמשתי שוב בנוסחא להפרש של סינוסים).

5. א. נסמן $AE=x$ לכן $EB=16-x$ (חיסור קטעים).

$AE\cdot EB=CE\cdot ED\Rightarrow x(16-x)=3\cdot 16\Rightarrow x=4\ ,x=12$ (שני מיתרים שנחתכים במעגל- מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני).

מכיוון ש- $(AE<BE)$ יש לפסול את התשובה $x=12$. לסיכום $AE=4cm,\ EB=12cm$.

ב. $\angle A$ היא זווית משותפת במשולשים AEG ו- ABF.

AF קוטר ו- $AG=GO$ (נתון) לכן $\frac{AG}{AF}=\frac{1}{4}\ \Leftarrow\ AF=2R\ ,\ AG=\frac{R}{2}$.

מסעיף א' מתקבל ש- $\frac{AE}{AB}=\frac{1}{4}$.

לפי משפט דמיון צ.צ.ז מתקבל $\Delta AEG\sim\Delta ABF$.

$\angle AEG=\angle ABF$ (זוויות שוות בהתאמה במשולשים דומים).

$\angle ABF=90^0$ (זווית היקפית שנשענת על קוטר) לכן גם $\angle AEG=90^0$. כלומר $EG\perp AB$.

ג. לפי יחס דמיון של המשולשים מהסעיף הקודם מתקבל $\frac{AE}{AB}=\frac{4}{16}=\frac{EG}{BF}=\frac{3}{BF}\Rightarrow BF=14\,cm$.

בעזרת משפט פיתגורס ב- ΔABF מתקבל $AB^2+BF^2=AF^2\ \Rightarrow AF=20\,cm$.

6. א. $\lim_{x\to\infty}f(x)\approx\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a=3$.

ב. <u>תחום הגדרה</u> - $x^2-9\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 3$

<u>נקודות קיצון</u> - $f'(x)=\dfrac{(6x+6)(x^2-9)-2x(3x^2+6x-45)}{\left(x^2-9\right)^2}=\dfrac{-6x^2+36x-54}{\left(x^2-9\right)^2}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-6x^2+36x-54}{\left(x^2-9\right)^2}=0 \Rightarrow x=3$. התשובה נפסלת בגלל תחום ההגדרה.

לכן אין נקודות קיצון לפונקציה.

<u>נקודות חיתוך עם הצירים</u> - $f(0)=5$, $f(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x-45=0 \Rightarrow x=3$, $x=-5$

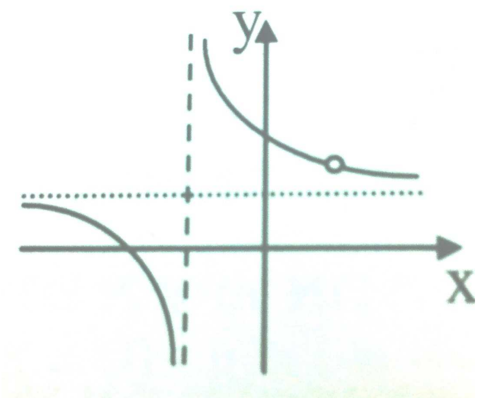
$x=3$ נפסל בגלל התחום הגדרה. לסיכום, $(0,5)$, $(-5,0)$

<u>אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x</u> - $y=3$

<u>אסימפטוטה מקבילה לציר ה- y</u> - $\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+3)}=4$ לכן $x=3$ הוא רק חור.

$\lim_{x\to-3}\frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+3)}=\pm\infty$ לכן יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=-3$.

ג.



ד. $\frac{f'(x)}{f''(x)}>0$ יש לחפש לפי הסקיצה מתי הפונקציה עולה וקעורה כלפי מעלה - אין x שמקיימים

או מתי הפונקציה יורדת וקעורה כלפי מטה - $x<-3$

7. א. $x^2-3x>0 \Rightarrow x<0 \ or \ x>3$

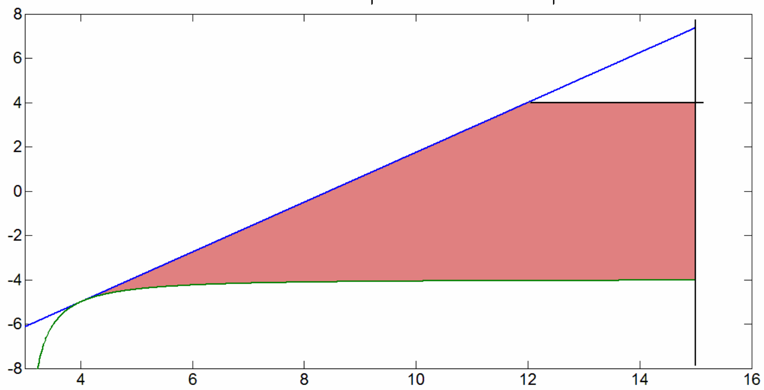
ב. $\lim_{x\to3} f(x)=\pm\infty$ $\lim_{x\to0} f(x)=\pm\infty$. יש אסימפטוטה ב- $x=3$, $x=0$.

$y=\lim_{x\to\infty}\frac{6-4x}{\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{|x|}=-4$, $y=\lim_{x\to-\infty}\frac{6-4x}{\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{|x|}=4$

ג. $f(4)=-5$, $\Rightarrow m=f'(4)=\frac{9}{8}$ $f'(x)=\frac{-4\sqrt{x^2-3x}-(6-4x)\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{x^2-3x}$.

לכן $y+5=\frac{9}{8}(x-4) \Rightarrow y=\frac{9}{8}x-9.5$.

ד. כאשר $x>4$ המשיק נמצא מעל הפונקציה



$$\int_4^{12}\left(\frac{9}{8}x-9.5\right)dx+\int_{12}^{15}4dx-\int_4^{15}\left(\frac{6-4x}{\sqrt{x^2-3x}}\right)dx=\frac{9}{16}x^2-9.5x\Big|_4^{12}+4x\Big|_{12}^{15}+4\sqrt{x^2-3x}\Big|_4^{15}=53.67$$

כאשר $\int\frac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x}}dx=2\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=4\sqrt{t}=4\sqrt{x^2-3x}$ $\qquad (x^2-3x=t\ ,dt=(2x-3)dx)$

8. נגדיר $AB=x$ ו- $AC=12-x$.

לפי משפט הקוסינוסים נקבל -

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cos(\prec A)\Rightarrow\cos(\prec A)=\frac{x^2+(12-x)^2-64}{2x(12-x)}=\frac{x^2-12x+40}{12x-x^2}$$

$$[\cos(\prec A)]'=\frac{(2x-12)(12x-x^2)-(12-2x)(x^2-12x+40)}{(12x-x^2)^2}=\frac{40(2x-12)}{positive}=0\ \Rightarrow x=6$$

אם רוצים שהזווית תהיה מקסימלית יש לדרוש שקוסינוס הזווית יהיה מינימלי.

ניתן לגזור רק את המונה על מנת לאפיין את נקודת הקיצון - $[\cos(\prec A)]''=80>0\ \Rightarrow \min$.

כמו שצוין, אם קוסינוס הזווית מינמלי אז הזווית מקסימלית.

נמצא את הזווית - $\cos(\prec A)=\frac{6^2-12\cdot 6+40}{12\cdot 6-6^2}=\frac{1}{9}\ \Rightarrow\prec A=83.62^0$