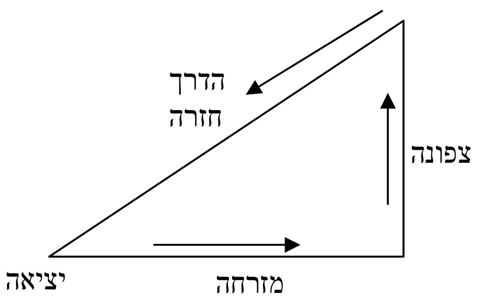
מתכונת במתמטיקה 4- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 45 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. הולך רגל יוצא כל בוקר להליכה לאורך מסלול שאורכו הכולל הוא 24 ק"מ. הוא יוצא מביתו לכיוון מזרח והולך m ק"מ. אחר כך הוא פונה צפונה והולך 1.5 שעות. לאחר מכן הוא חוזר לביתו בדרך הקצרה ביותר (ראה ציור). בדרכו חזרה הוא הולך 60 דקות פחות מהזמן שבו הוא הלך בשני הכיוונים יחד, מזרחה וצפונה. בכל קטעי הדרך הוא הלך באותה מהירות קבועה.
חשב את m.



2. a_n ו- a_K השם שני איברים בסדרה חשבונית במקום ה- n ובמקום ה- k בהתאמה.
הפרש הסדרה הוא d והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1 = md$. (m מספר טבעי, $d \neq 0$).

א. (1) הראה שמתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

(2) הבע באמצעות m,n ו- k את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של שני האיברים a_n ו- a_K .

ב. (1) הבע באמצעות d ו- m את הסכום $a_{33} + a_{66}$

(2) נתון: $a_{33} + a_{66} = a_{109}$, סכום 69 האיברים הראשונים בסדרה הוא 6210. מצא את d ו- m.

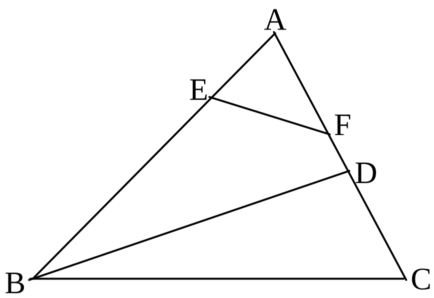
3. בחדר נמצאים שלוש נשים והשאר ילדים. בוחרים באקראי אדם מהחדר. אם נבחרה אישה היא יוצאת מהחדר, אם נבחר ילד הוא חוזר לחדר. חוזרים על הבחירה פעם נוספת.

א. מצא את כמות האנשים בחדר אם ידוע שההסתברות שבשתי ההוצאות תבחר אישה היא 0.3.

ב. מה ההסתברות שבשתי ההוצאות יבחר בדיוק ילד אחד?

ג. בחדר סמוך לחדר הראשון נמצאות חמש נשים ומספר לא ידוע של ילדים. כמה ילדים לפחות צריכים להיות בחדר הסמוך כדי שההסתברות שייבחרו שני ילדים מחדר זה תהיה גדולה מההסתברות שיבחרו שני ילדים מהחדר הראשון ? (הנח כי גם בחדר הסמוך בוחרים פעמיים לפי אותם כללים).

פרק שני – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 4-6.



4. במשולש ABC מחלקת הנקודה D את הצלע AC כך ש- $AD:DC=2:1$

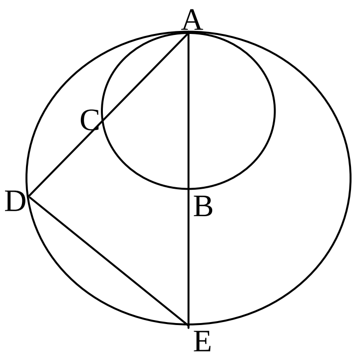
E נקודה על AB כך ש- $AE=2cm$, $BE=7.6cm$.

F נקודה על AC כך ש- $AF=3.2cm$. נתון: $AC=9cm$.

א. הוכח כי ניתן לחסום במעגל את המרובע BEFD.

ב. נתון כי שטח המרובע BEFD הוא 24 סמ"ר.

מצא את שטח המשולש BCD.



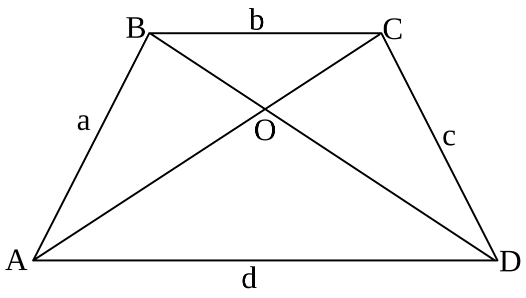
5. שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A. נקודה B היא מרכז המעגל החיצוני ונמצאת על היקף המעגל הפנימי. המיתר AD חותך את המעגל הפנימי בנקודה C.

המשך הקטע AB חותך את המעגל החיצוני בנקודה E.

הוכח: א. $\Delta ACB \sim \Delta ADE$ ב. $S_{ADE}=4S_{ACB}$

ג. CB קטע אמצעיים ב- ΔADE

6. בטרפז ABCD (AD||BC) נתון: $AC \perp BD$, $AD=d$, $CD=c$, $BC=b$, $AB=a$ $(d>b)$



אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O.

א. הוכח: $a^2+c^2=b^2+d^2$

ב. דרך קודקוד B מעבירים ישר המקביל לשוק CD.

הישר חותך את הבסיס AD בנקודה M.

נתון כי $\measuredangle ABM=\alpha$. הוכח כי: $\cos\alpha=\dfrac{bd}{ac}$.

ג. הבע באמצעות d , b , α את שטח המשולש ABM ואת שטח הטרפז ABCD.

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 7-9.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{8x-15}$. מהנקודה $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{4}\right)$ מעבירים לפונקציה משיק.

א. מצא את משוואת המשיק ואת נקודת ההשקה.

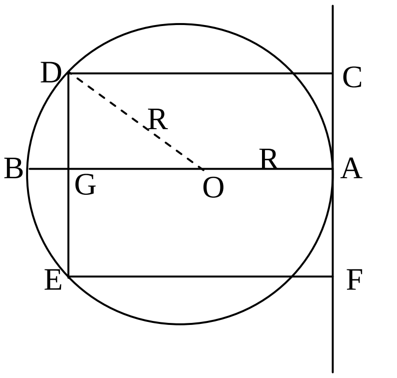
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה והמשיק.

ג. דרך נקודת ההשקה מעבירים נורמל למשיק.

(1) מצא את משוואת הנורמל.

(2) מצא את השטח הכלוא ע"י הפונקציה, הנורמל וציר ה- x.

(3) השטח הכלוא ע"י הנורמל, הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y מסתובב סביב ציר ה- x. מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



8. נתון מעגל שרדיוסו R.

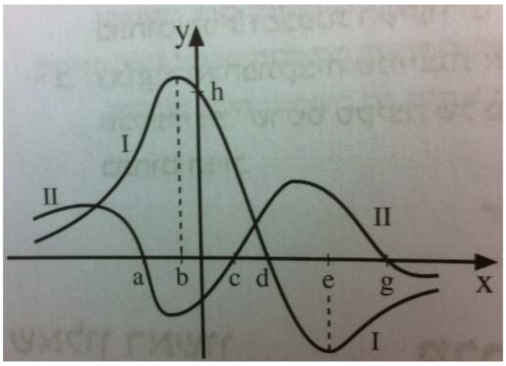
AB הוא קוטר במעגל. בנקודה A מעבירים משיק למעגל.

המיתר DE מקביל למשיק בנקודה A.

מצא מה צריך להיות אורך המיתר DE ,

כדי ששטח המלבן CDEF יהיה מקסימאלי.

9. בציור מתוארים שני גרפים: גרף I וגרף II.



אחד הגרפים הוא של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ והגרף האחר הוא של פונקצית הנגזרת השלישית $f'''(x)$. היעזר בפרמטרים מתאימים וענה על הסעיפים הבאים:

א. איזה גרף של $f'(x)$ ואיזה של $f'''(x)$? נמק.

ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגה.

ג. מצא את שיעור ה- x של נקודות הפיתול של $f'(x)$.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$. סמן על ציר ה- x את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של $f''(x)$ עם ציר ה- x ואת שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f''(x)$.

ה. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרף של $f'(x)$ והצירים בתחום $0\le x\le e$.

אם נתון: $f(0)=p$, שיעור ה- y של נקודת הקיצון שמצאת בסעיף ב' הוא s ו- $f(e)=0$

ו. מצא את משוואת המשיק לגרף $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

בהצלחה !

1. נגדיר את מהירות הרוכב להיות v (קמ"ש). המרחק צפונה שווה ל- $y=1.5v$

מכאן מתקבל שהמרחק בדרך חזרה הוא $24-m-1.5v$.

זמן הלוך - $t=\frac{m}{v}+1.5$. זמן חזור והא $t=\frac{24-m-1.5v}{v}$. ההפרש זמנים בין ההלוך לחזור הוא שעה

לכן $\frac{24-m-1.5v}{v}+1=\frac{m}{v}+1.5 \Rightarrow 24-m-1.5v+v=m+1.5v \quad \Rightarrow \quad v=12-m$.

מכאן שהמרחק מזרחה הוא m, המרחק צפונה הוא $y=18-1.5m$ והמרחק חזור הוא $6+0.5m$. כעת

לפי פיתגורס נקבל $m^2+(18-1.5m)^2=(6+0.5m)^2 \Rightarrow m=8\ ,\ m=12$.

את $m=12$ יש לפסול, מכיוון שבמצב זה המהירות שווה ל-0. מצב לא הגיוני.

2. א. (1) $a_n=a_1+(n-1)d\ ,\ a_k=a_1+(k-1)d \Rightarrow a_n+a_k=a_1+a_1+d(n+k-2)$.

נשתמש בכך ש- $a_1=md$ ונקבל $a_n+a_k=md+a_1+d(n+k-2)=a_1+d(n+k+m-2)$.

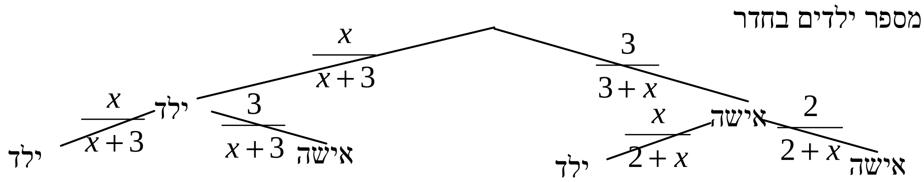
(2) נגדיר את $a_t=a_k+a_n$ לכן $a_1+(t-1)d=a_1+d(n+k+m-2)\Rightarrow t=n+k+m-1$

ב. (1) נשתמש בביטוי של סעיף א(1) ונקבל $a_{33}+a_{66}=md+d(97+m)=97d+2md$.

(2) בעזרת הביטוי של א (2) נקבל $109=33+66+m-1\Rightarrow m=11$. נשתמש בביטוי של סכום

הסדרה ונקבל - $S_{69}=[2a_1+(69-1)d]\frac{69}{2}=6210 \Rightarrow (22d+68d)=180\Rightarrow d=2$.

3. x- מספר ילדים בחדר



א. צריך לבחור פעמים אישה לכן $\frac{3}{x+3}\cdot\frac{2}{2+x}=\frac{3}{10}\Rightarrow 60=3(x+2)(x+3)\Rightarrow x=2$.

לכן יש בסה"כ 5 אנשים בחדר (2 ילדים ו- 3 נשים).

ב. $P=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=0.54$ - ילד וגם אישה או אישה וגם ילד.

ג. ההסתברות לבחור שני ילדים מהחדר הראשון היא $P=1-0.3-0.54=0.16$ - מאורע משלים לסעיפים הקודמים.

כעת, נניח שבחדר השני יש y ילדים ונקבל שהסתברות לבחור שם שני ילדים היא $P=\left(\frac{y}{y+5}\right)^2$.

צריך לדרוש ש- $\left(\frac{y}{y+5}\right)^2 > 0.16$. המכנה בטוח חיובי לכן ניתן להתעלם ממנו.

$y^2 > 0.16y^2 + 1.6y + 4 \Rightarrow 0.84y^2 - 1.6y - 4 > 0 \Rightarrow y > 3.51 \ or \ y < -1.61$.

כמובן שמספר הילדים חייב להיות מספר טבעי לכן $y \geq 4$. לכן צריך לפחות 4 ילדים בחדר השני.

4. א. נגדיר $FD = x$. מהנתון $AF = 3.2cm$ ו- $AC = 9cm$ מתקבל $DC = 9 - 3.2 - x = 5.8 - x$.

מהנתון $AD : DC = 2:1$ מתקבל $\frac{AD}{DC} = \frac{3.2+x}{5.8-x} = 2 \Rightarrow x = 2.8cm$.

נשים לב שהתקבל $\frac{AE}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ו- $\frac{AF}{AB} = \frac{3.2}{9.6} = \frac{1}{3}$. כלומר יש יחס שווה בין שתי צלעות במשולשים ΔABD ו- ΔAFE . בנוסף הזווית הכלואה בין הצלעות, זווית A, משותפת לשני המשולשים.

מכאן ש- $\Delta ABD \sim \Delta AFE$ לפי צ.צ.ז.

נסמן $\angle AFE = \alpha$. $\angle ABD = \angle AFE = \alpha$ (זוויות במשולשים דומים שוות, בהתאמה).

זווית EFD צמודה לזווית AFE לכן $\angle EFD = 180 - \alpha$.

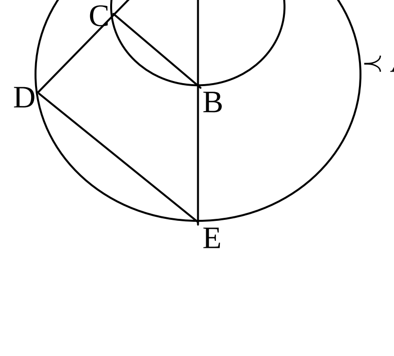
התקבל ש- $\angle EFD + \angle EBD = 180^0$ לכן ניתן לחסום את המרובע EFDB במעגל (אם זוג זווית נגדיות במרובע שווה ל- 180 מעלות אז ניתן לחסום אותו במעגל).

ב. נסמן את $S_{AEF} = S$. $\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{S}{S+24} \Rightarrow S = 3cm^2$ (במשולשים דומים, יחס הצלעות בריבוע שווה ליחס השטחים). בעזרת הנוסחא לשטח משולש נמצא את סינוס זווית A : .

$S = \frac{AF \cdot AE \cdot \sin \angle A}{2} \Rightarrow 3 = \frac{2 \cdot 3.2 \cdot \sin \angle A}{2} = 3 \Rightarrow \sin \angle A = \frac{3}{3.2}$.

מכאן נקבל את השטחים: $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle A}{2} = 40.5cm^2$ ו- $S_{ABD} = 27cm^2$.

ע"י חיסור שטחים מתקבל $S_{BDC} = S_{ABC} - S_{ABD} = 13.5cm^2$



5. א. בניית עזר: נעביר את המשיק המשותף שעובר דרך נקודה A ונעביר את הקו CB.

$\angle MAD = \angle AED = \alpha$ (זווית בין משיק למיתר במעגל הגדול שווה לזווית ההיקפית שנשענת על אותו מיתר) .

באותו אופן במעגל הקטן $\angle MAD = \angle ABC = \alpha$ ומכאן מתקבל ש- $\angle ABC = \angle AED$

בנוסף זווית A משותפת לשני המשולשים. $\Delta ACB \sim \Delta ADE$ לפי ז.ז.

ב. $AB = BE = R$ (נתון –B מרכז המעגל הגדול)

יחס הצלעות במשולשים הדומים הוא 1:2.

ולכן יחס השטחים הוא 1:4 (יחס הצלעות בריבוע שווה ליחס השטחים במשולשים דומים).

ג. $AB = BE$, $AC = CD \Leftarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{2}$ (יחס הצלעות במשולשים דומים שווה, בהתאמה).

CB קטע אמצעים ב- ΔADE (קטע החוצה את שתי צלעות המשולש הוא קטע אמצעים).

6. א. נתון $AC \perp BD$ לכן $\measuredangle BOA = \measuredangle BOC = \measuredangle COD = \measuredangle DOA = 90^0$

נתון AD||BC לכן $\measuredangle BDA = \measuredangle DBC = \beta$ (זוויות מתחלפות בין ישירים מקבילים שווֹת).

נסתכל ב- ΔBOC - משולש ישר זווית: $BO = b\cos\beta$, $CO = b\sin\beta$.

נסתכל ב- ΔAOD - משולש ישר זווית: $AO = d\sin\beta$, $DO = d\cos\beta$.

לפי פיתגורס ב- ΔDOC - משולש ישר זווית: $(b\sin\beta)^2 + (d\cos\beta)^2 = c^2$

לפי פיתגורס ב- ΔBOA - משולש ישר זווית: $(d\sin\beta)^2 + (b\cos\beta)^2 = a^2$

בעזרת חיבור המשוואות ושימוש בזהות $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ מתקבל $b^2 + d^2 = a^2 + c^2$.

ב. BM||CD (נתון) ו- AD||BC (נתון) לכן BCDM מקבילית (מרובע בעל 2 זוגות של צלעות מקבילות הוא מקבילית – הגדרה).

מכאן מתקבל ש- $BC = MD = b$, $BM = CD = c$ (צלעות נגדיות במקבילית שוות)

$AM = d - b$ (חיסור קטעים). נתון ש- $\measuredangle ABM = \alpha$. בערת משפט הקוסינוסים ב- ΔBAM:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\alpha = (b-d)^2 \Rightarrow 2ac\cdot\cos\alpha = -b^2 - d^2 + c^2 + a^2 + 2bd$$

בעזרת סעיף א' נקבל $2ac\cdot\cos\alpha = 0 + 2bd \Rightarrow \cos\alpha = \frac{bd}{ac}$.

ג. $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB\cdot MB\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\cdot ain\alpha$. בעזרת סעיף ב' נקבל ש- $ac = \frac{bd}{\cos\alpha}$

ולכן $S_{ABM} = \frac{1}{2}\frac{bd}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = \frac{bd}{2}\tan\alpha$.

נמצא את הגובה h לצלע AM במשולש ABM שהוא גם הגובה של הטרפז ABCD:

$$S_{ABM} = \frac{bd}{2}\tan\alpha = \frac{AM\cdot h}{2} = \frac{d-b}{2}\cdot h \Rightarrow h = \frac{bd}{d-b}\tan\alpha.$$

$$S_{ABCD} = \left(\frac{b+d}{2}\right)h = \frac{b+d}{2(d-b)}bd\cdot\tan\alpha.$$

7. א. נקרא לנקודת ההשקה $(a,\sqrt{8a-15})$. נמצא את השיפוע ע"י הנגזרת - $f'(a)=m=\frac{4}{\sqrt{8a-15}}$.

נמצא את השיפוע לפי שתי נקודות - $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{8a-15}-2.75}{a-1.5}$.

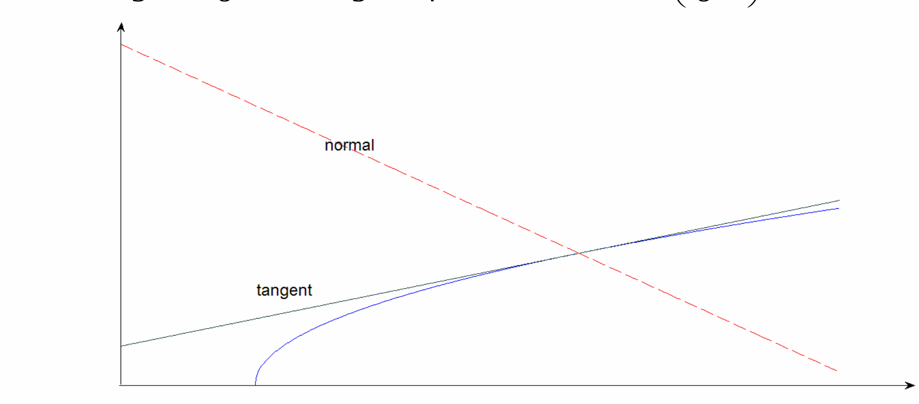
נשווה את השיפועים ונקבל $\frac{4}{\sqrt{8a-15}}=\frac{\sqrt{8a-15}-2.75}{a-1.5}\Rightarrow 2.75\sqrt{8a-15}=4a-9$.

נעלה את שני האגפים בריבוע - $256a^2-2120a+3111=0\Rightarrow a=\frac{51}{8}\ ,\ a=\frac{61}{32}$.

נבדוק האם יש פתרונות מדומים: הפתרון $a=\frac{61}{32}$ נפסל.

נקודת ההשקה היא $\left(\frac{51}{8},6\right)$ ומשואת המשיק היא $y-6=\frac{2}{3}(x-\frac{51}{8})\Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{4}$

ב.



ג. (1) שיפוע הנורמל ניצב למישק לכן $m_\perp=-1.5$ וגם הנורמל עובר דרך $\left(\frac{51}{8},6\right)$ לכן משואת הנורמל היא

$$y-6=-1.5(x-\frac{51}{8})\ \Rightarrow\ y=-1.5x+\frac{249}{16}$$

(2) נמצא את נקודת החיתוך של הנורמל עם ציר ה- x : $(\frac{83}{8},0)$. נקודת החיתוך של הפונקציה $(\frac{15}{8},0)$.

נקודת החיתוך של הנורמל והפונקציה היא נקודת ההשקה $\left(\frac{51}{8},6\right)$.

$$S=\int_{15/8}^{51/8}\sqrt{8x-15}dx+\int_{51/8}^{83/8}(-1.5x+249/16)dx=\frac{(8x-15)^{1.5}}{12}\Bigg|_{15/8}^{51/8}-\frac{3}{4}x^2+\frac{249}{16}x\Bigg|_{51/8}^{83/8}=30$$

(3) $$V=\pi\int_0^{51/8}(-1.5x+249/16)^2dx-\pi\int_{15/8}^{51/8}(8x-15)dx\Rightarrow$$

$$V=\pi\left(\frac{(-1.5x+249/16)^3}{-4.5}\right)\Bigg|_0^{51/8}-\pi\left(4x^2-15x\right)\Big|_{15/8}^{51/8}=708.578\pi$$

8. CF משיק למעגל בנקודה A (נתון) לכן $\prec CAB=90^0$ (זווית בין משיק לרדיוס שווה ל- 90 מעלות).

$CF \parallel DE$ (נתון) $\Leftarrow$ $\prec DGA=90^0$ (זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים).

$DG=GE$ (קו היוצא ממרכז המעגל למיתר ומאונך למיתר גם חוצה אותו)

נגדיר $DG=GE=x$. לפי משפט פיתגורס ב- ΔGDO נקבל $GO=\sqrt{R^2-x^2}$.

$GA=GO+OA=\sqrt{R^2-x^2}+R$ (חיבור קטעים).

שטח המלבן הוא $S=GA\cdot DG+GE\cdot GA=2x\cdot\left(\sqrt{R^2-x^2}+R\right)$.

נגזור ונשווה ל- 0 -

$$S'=2\cdot\left(\sqrt{R^2-x^2}+R\right)+2x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}=0\Rightarrow 2R^2-2x^2+2R\sqrt{R^2-x^2}-2x^2=0$$

$$2x^2-R^2=R\sqrt{R^2-x^2}\Rightarrow(2x^2-R^2)^2=R^2(R^2-x^2)R^2\Rightarrow 4x^4-4x^2R^2+R^4=R^4-R^2x^2$$

$x^2(4x^2-3R^2)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}R$. רק התשובה $x=\frac{\sqrt{3}}{2}R$ הגיונית.

נראה שמדובר בנקודת מקסימום: $S'(R)<0$, $S'(0.5R)>0$ לכן מדובר בנקודת מקסימום.

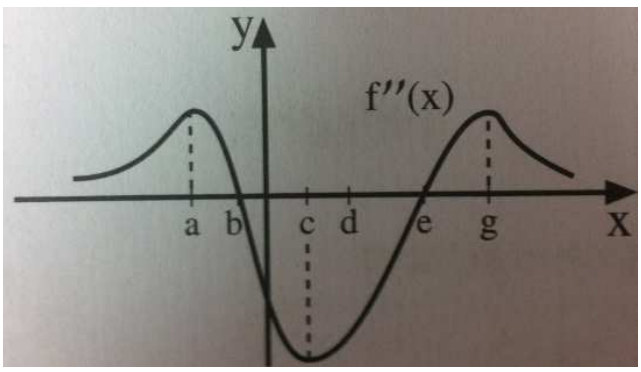
אורך המיתר DE שווה ל- $DE=2x=\sqrt{3}R$.

9. א. גרף I $f'(x)$, גרף II $f'''(x)$. מכיוון שבכל נקודה של גרף I יש פיתול גרף II מתאפס. ניתן גם להסתכל על תחומי קעירות מעלה ומטה.

ב. כאשר גרף $f'(x)$ מתאפס ומשנה את סימנו הפונקציה $f(x)$ מקבלת קיצון: $x=d$ היא נקודת מקסימום הנגזרת הופכת מחיובית לשלילית. כלומר, הפונקציה עוברת מעלייה לירידה.

ג. נקודות הפיתול של $f'(x)$ מתקבלות כאשר $f'''(x)$ מתאפסת : $x=a,c,g$

ד.



ה. $S=\int_0^d f'(x)dx-\int_d^e f'(x)dx=f(d)-f(0)-f(e)+f(d)=2s-p$

ו. השיפוע - $f'(0)=h$, הנקודה - $(0,p)$ לכן $y=hx+p$