מתכונת במתמטיקה 7- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 50 דקות).

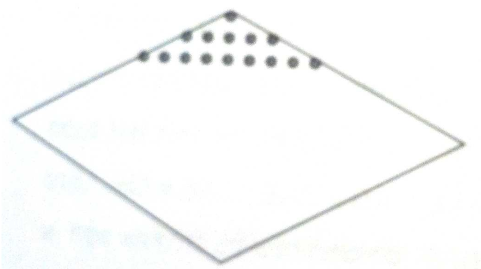
פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. שני צינורות מובילים מים לבריכה, שקיבולה 500 מ"ק. דרך צינור השני נכנסים 5 מ"ק לדקה יותר מאשר דרך הראשון. יום אחד, כשהבריכה הייתה ריקה, פתחו את הצינור הראשון ו- m דקות לאחר מכן $(m > 0)$ פתחו גם את השני. כשהבריכה התמלאה התברר, שהצינור הראשון סיפק 350 מ"ק מים.

א. הבע באמצעות m את הזמן, שבו זרמו מים בצינור השני.

ב. עבור אילו ערכי m יש פתרון לבעיה ? הייתכנו שני פתרונות לבעיה ?

2. א. גנן עיצב ארוגת פרחים שצורתה מעוין. בקודקוד המעוין יש פרח אחד ובכל שורה יש ארבעה פרחים יותר מאשר בשורה הקודמת (ראה ציור). המרווחים בין השורות זהים. השורה הארוכה ביותר נמצאת לאורך האלכסון הגדול של המעוין. סה"כ יש בארוגה 2551 פרחים.
כמה שורות יש בארוגת הפרחים.



ב. נתונה סדרה $1, -5, 9, -13, 17, -21, ...$

הערכים המוחלטים של איברי הסדרה מהווים סדרה חשבונית

נתון כי סכום $2n-1$ האבירים הראשונים בסדרה הנתונה הוא 101

מצא את הסכום של n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי זוגים בסדר הנתונה.

3. בשכבה יא יש שתי כיתות: י"א 8 ו- י"א 9.

בכיתה י"א 8 יש 40 תלמידים, ולמחציתם יש מחשבון חכם.

בכיתה י"א9 יש 35 תלמידים, ול- 40% מהם יש מחשבון חכם.

א. בחרו באקראי תלמיד משכבה י"א, ונמצא שיש לו מחשבון חכם.

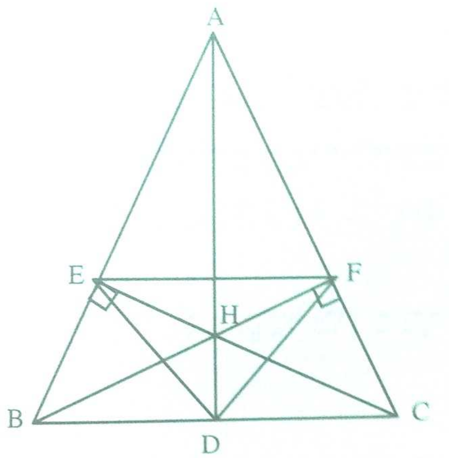
מהי ההסתברות שהוא לומד ביתה י"א 8 ?

ב. לכמה תלמידים יש מחשבון חכם או/ו הם בכיתה י"א 8 ?

ג. בחרו באקראי בזה אחר זה (בלי החזרה) 2 תלמידים מכיתה י"א 8, ובאותו אופן בחרו 2 תלמידים מכיתה י"א 9 .

מהי ההסתברות של -2 התלמידים מכיתה י"א 8 וגם ל - 2 התלמידים מכיתה י"א 9 אין מחשבון חכם ?

פרק שני – יש לענות על שאלה אחת מבין השאלות 4-5



4. במשולש שווה שוקים ABC $(AB = AC)$.

הנקודה H היא נקודת מפגש הגבהים של המשולש.

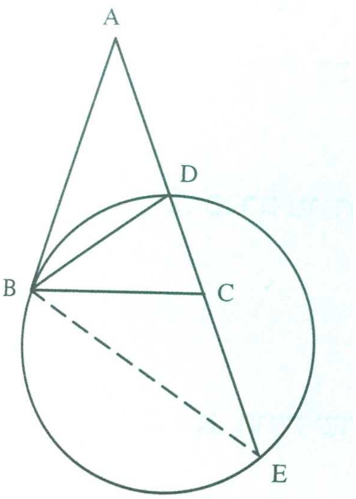
א. הוכח: המרובע EFCB בר חסימה

ב. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta DFC$

ג. נתון: $AD = 4cm$, $DC = 3cm$.

חשב את היחס בין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC

לבין רדיוס המעגל החסום במשולש DFC.



5. משולש ABC הינו משולש שווה שוקים $(AB = AC)$

השוק AB משיקה למעגל בנקודה B. השוק AC והמשכה חותכים

את המעגל בנקודות D ו- E בהתאמה (ראה שרטוט).

נתון: BD חוצה את הזווית ABC, זווית הבסיס של המשולש ABC

היא 2α ו- $BC = a$.

א. הבע באמצעות a ו - α את רדיוס המעגל.

ב. המשך הבסיס BC חותך את המעגל בנקודה F.

הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לבין שטח המשולש BDF

הוא $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin 4a \sin 2\alpha}$

ג. נתון שרדיוס המעגל שווה לצלע BC. הבע באמצעות a את המכפלה $DC \cdot CE$

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 6-8.

6. נתונה פונקצית הנגזרת $g'(x)=\frac{2f(x)(2-f(x))}{x(1-f(x))^2}$. $f(x)$ מוגדרת רק עבור $x>0$

בנוסף נתון: $f(9)=2$, $f(1)=0$, כאשר $1<x<9$ מתקבל ש- $0<f(x)<2$,

כאשר $0<x<1$ מתקבל ש- $f(x)>2$, כאשר $x>9$ מתקבל ש- $f(x)<0$

ו- $f(x)\neq 1$ לכל x פרט $f(3)=1$.

א. (1) מצא תחום ההגדרה של $g'(x)$

(2) ידוע שלפונקצית הנגזרת יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=0$ מצא את האסימפטוטות השנייה של $g'(x)$ המאונכת לציר ה- x.

(3) מצא את נקודות החיתוך של $g'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה)

(4) מצא את התחום שבהן $g'(x)$ חיובית ואת התחום שבהן הפונקציה שלילית.

ב. ידוע כי לפונקצית הנגזרת $g'(x)$ יש אסימפטוטה אופקית ב- $y=0$.

סרטט סקיצה של גרף של פונקצית הנגזרת $g'(x)$.

ג. הישר $y=-4$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x>3$

(1) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה. נמק.

(2) הסבר מדוע $g(10)<-4$

(3) השטח, המוגבל ע"י גרף פונקצית הנגזרת $g'(x)$ וע"י ציר ה- x בתחום $9\le x\le 10$ שווה לחצי.

מצא את הערך של $g(10)$.

7. נתונות הפונקציות: $f(x)=2\sin^2 2x$ ו- $g(x)=3-\sqrt{8}\sin 2x$. בתחום $0\le x\le \frac{\pi}{2}$.

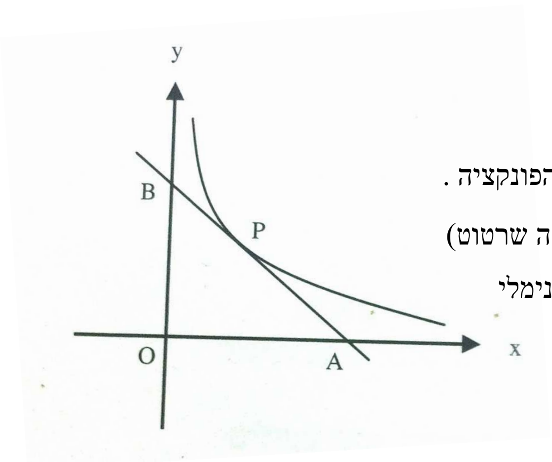
א. מצא את נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות בתחום הנתון.

ב. שרטט סקיצה של הגרפים של שתי הפונקציות באותה מערכת צירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- y בתחום הנתון.

8. לפינך גרף הפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}$.



בנקודה כלשהי P שעל גרף הפונקציה $f(x)$, מעבירים משיק לגרף הפונקציה .

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B. (ראה שרטוט)

מצא את שיעורי הנקודה P עבורם סכום הקטעים OA ו- OB הוא מינימלי

(O ראשית הצירים)

בהצלחה !

1.א. $p_1 = p$ - ההספק של הצינור הראשון. $p_2 = p+5$ - ההספק של הצינור השני

$p=\frac{350}{t_2+m}$, $p+5=\frac{150}{t_2}$, t_2 - הזמן שלוקח לצינור הראשון

הפרש הספקים - $\frac{150}{t_2}-\frac{350}{t_2+m}=5$

$$\frac{150}{t_2}-\frac{350}{t_2+m}=5 \Rightarrow 150t_2+150m-350t_2=5t_2^{\,2}+5mt_2 \Rightarrow t_2^{\,2}+(m+40)t_2-30m=0$$

$$t_2=\frac{-(40+m)\pm\sqrt{(m+40)^2+120m}}{2}=\frac{-40-m+\sqrt{m^2+200m+1600}}{2}$$

ב. לא יתכנו שני פתרונות לבעיה, חייבים לדרוש שהזמן יהיה חיובי לכן $-\Delta$ נפסל במקרה זה.

בהנחה ש- $m>0$ מתקבל גם $t_2>0$. לכן יש פתרון לבעיה עבור כל $m>0$

2. א. חוץ מהאלכסון הראשי כל שורה חוזרת על עצמה פעמים. n - מספר השורות מהקודקוד עד לאלכסון הראשי של המעוין (לא כולל).

$2S_n=2\left(2\cdot1+4(n-1)\right)\frac{n}{2}=4n^2-2n$ - סכום הפרחים ללא האלכסון הראשי

מספר הפרחים באלכסון הראשי $a_{n+1}=1+(n+1-1)4=4n+1$.

הסכום הכולל - $S=4n^2-2n+4n+1=4n^2+2n+1=2551 \Rightarrow 2n^2+n-1275=0\Rightarrow n=25$

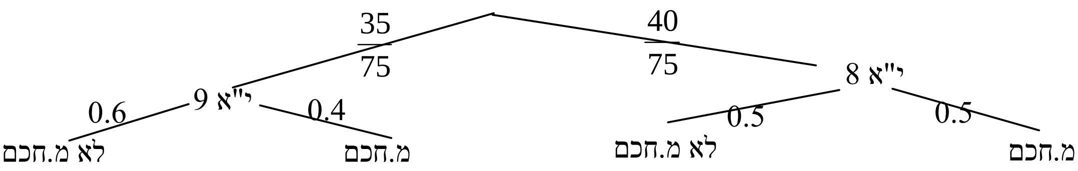
בארוגה יש בסה"כ $2n+1$ שורות - **51 שורות**

ב. $S_{\text{אי זוגי}}=\left(2+8(n-1)\right)\frac{n}{2}=4n^2-3n$, $S_{\text{זוגי}}=\left(-10-8(n-2)\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)=-4n^2+7n-3$

$S_{2n-1}=4n-3=101\Rightarrow n=26$.

נציב לסכום האיברים במקומות האי זוגים ונקבל $S_{\text{אי זוגי}}=\left(2+8(26-1)\right)\frac{26}{2}=2626$

3.



א. $P(\text{חכם}/8\text{י"א}) = \dfrac{P(\text{חכם}\cap 8\text{י"א})}{P(\text{חכם})} \dfrac{\frac{40}{75}\cdot 0.5}{\frac{40}{75}\cdot 0.5+\frac{35}{75}\cdot 0.4} = \dfrac{10}{17}$

ב. $N = \dfrac{18}{25}\cdot 75 = 54 \qquad P = 1-\dfrac{35}{75}\cdot 0.6 = \dfrac{18}{25} \Rightarrow$

ג. $0.08597 = \dfrac{19}{221} = \dfrac{21}{35}\cdot\dfrac{20}{34}\cdot\dfrac{20}{40}\cdot\dfrac{19}{39} = P$.

4. א. H – נקודת מפגש הגבהים לכן $AD \perp BC$. ΔABC משולש שווה שוקים (נתון)

AD - הוא גם תיכון וגם חוצה זווית הראש (גובה לבסיס במש"ש הוא גם תיכון וגם חוצה זווית הראש).

HD - הוא גם גובה וגם תיכון ב- ΔBHC לכן ΔBHC הוא משולש שווה שוקים

$\sphericalangle HBC = \sphericalangle HCB = \alpha$ (זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקים)

$\sphericalangle EBC = 90-\alpha$ (סכום זוויות במשולש ΔEBC שווה ל – 180 מעלות)

$\sphericalangle FCB = 90-\alpha$ (סכום זוויות במשולש ΔFBC שווה ל – 180 מעלות)

BC=BC (צלע משותפת)

$\Delta EBC \cong \Delta FCB$ (לפי ז.צ.ז).

$EB = FC$ (שוקים במשולש שווה שוקים שוות). בנוסף $AB = AC$ (נתון)

לכן ע"י חיסור קטעים נקבל $AE = AF \Leftarrow AF = AC - FC \;,\; AE = AB - EB$.

ΔAEF הוא משולש שווה שוקים (השוקים שוות לכן משולש שווה שוקים).

AH - חוצה זווית הראש לכן גם גובה לבסיס EF (במשולש שווה שוקים חוצה זווית הראש הוא גם גובה).

$\sphericalangle BAD = \alpha$ (סכום זוויות במשולש ΔABD שווה ל – 180 מעלות)

$\sphericalangle AHE = 90-\alpha$ (סכום זוויות במשולש ΔAEH שווה ל – 180 מעלות).

$\sphericalangle FEB = 180-(90-\alpha) = 90+\alpha$ (זוויות צמודות - $\sphericalangle AEB$ זווית שטוחה).

$\sphericalangle FEB + \sphericalangle FCB = 90-\alpha+90+\alpha = 180^0$ (חיבור זוויות).

מרובע EFCB חסום במעגל (אם זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180 מעלות המרובע חסום במעגל).

ב. $\sphericalangle BFC = 90^0$ (נתון)

C הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע EFCB (זווית היקפית ששווה ל- 90 מעלות נשענת על קוטר).

$BD = DC$ (הוכח בסעיף א') לכן D היא נקודת מרכז המעגל.

$FD = DC$ (רדיוסים במעגל) לכן ΔFDC משולש שווה שוקים.

$\sphericalangle FCD = \sphericalangle DFC = 90-\alpha$. (זוויות בסיס במשולש שווה שוקים שוות)

$\Delta ABC \sim \Delta BC$ (לפי ז.ז).

ג. $DC = 3cm$ (נתון), $AD = 4cm$.

לפי פיתגורס ב- ΔADC : $AC = \sqrt{4^2+3^2} = 5cm$

יחס הרדיוסים במשולשים דומים הוא כמו יחס הצלעות.

מכאן ש- $\frac{R_{ABC}}{R_{FDC}} = \frac{5}{3} = \frac{AC}{DC}$.

5. א. $\angle ACB = 2\alpha$ (נתון) לכן גם $\angle ABC = 2\alpha$ (זוויות בסיס במשולש שווה שוקים שוות).

$\angle ABD = \angle DBC = \alpha$ (נתון- BD חוצה זווית ABC).

$\angle DEB = \alpha$ (נתון AB משיק למעגל וזווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית שנשענת על אותו מיתר)

$\angle BCE = 180 - 2\alpha$ ($\angle DCB$ זווית צמודה לה).

לפי משפט הסינוסים ב- ΔCBE : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{BE}{\sin(180-2\alpha)} \Rightarrow BE = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2a\cos\alpha$.

$\angle CDB = 180 - 3\alpha$ (סכום זוויות ב- ΔCDB שווה ל- 180 מעלות).

לפי משפט הסינוסים ב- ΔDBE : $\frac{BE}{\sin(180-3\alpha)} = 2R \Rightarrow R = \frac{a\cos\alpha}{\sin 3\alpha}$.

ב. $\angle DFB = \angle DEB = \alpha$ (זוויות שנשענות על אותה קשת שוות).

$\angle BDF = 180 - 2\alpha$ (סכום זוויות ב - ΔDBF שווה ל- 180 מעלות).

התקבל ש- $\angle DFB = \angle DBF = \alpha$ ולכן $DB = DF$ (מול זוויות שוות צלעות שוות).

משפט הסינוסים ב- ΔDBF - $\frac{DF}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow DF = FB = 2R\sin\alpha$.

$$S_{DBF} = \frac{(2R\sin\alpha)^2 \sin(180-2\alpha)}{2} = 2R^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha = \frac{2a^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{\sin^2 3\alpha}$$

$\angle BAC = 180 - 4\alpha$ (סכום זוויות ב- ΔABC שווה ל- 180 מעלות)

$$\frac{a}{\sin(180-4\alpha)} = \frac{AB}{\sin 2\alpha} \Rightarrow AB = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha} \Rightarrow AB = AC = \frac{a}{2\cos 2\alpha}$$

$$S_{ABC} = \frac{(a\sin 2\alpha)^2 \sin(180-4\alpha)}{2\sin^2 4\alpha} = \frac{a^2\sin^2 2\alpha}{2\sin 4\alpha}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBF}} = \frac{\sin^2 2\alpha}{2\sin 4\alpha} \cdot \frac{\sin^2 3\alpha}{2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha\sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha\sin^2 3\alpha}{\sin 4\alpha\sin^3 2\alpha} = \frac{\sin^2 3\alpha}{\sin 4\alpha\sin 2\alpha}.$$

ג. $R = \frac{a\cos\alpha}{\sin 3\alpha} = a \Rightarrow \cos\alpha = \sin 3\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \cos(90-3\alpha) \Rightarrow \alpha = 22.25^0$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔDBF : $\frac{BF}{\sin(180-2\alpha)}=2a \Rightarrow BF=2a\sin 2\alpha=\sqrt{2}a$

$CF=BF-BC=(\sqrt{2}-1)a$ (חיסור קטעים).

$BC\cdot CF=DC\cdot CE=(\sqrt{2}-1)a^2=0.414a^2$

6. א. (1) המכנה שונה מאפס: $x\neq 3 \Leftarrow 1-f(x)\neq 0$ ו- $x\neq 0$. בנוסף תחום ההגדרה של $f(x)$: $x>0$

לסיכום תחום ההגדרה הוא $x\neq 3$, $x>0$.

(2) האסימפטוטות המקבילות לציר ה- y : $x=3$, $x=0$. בשתי הנקודות המכנה שואף ל-0 והמונה שווה למספר שונה מאפס.

(3) חיתוך עם ציר ה- y: אין, הפונקציה לא מוגדרת ב- $x=0$.

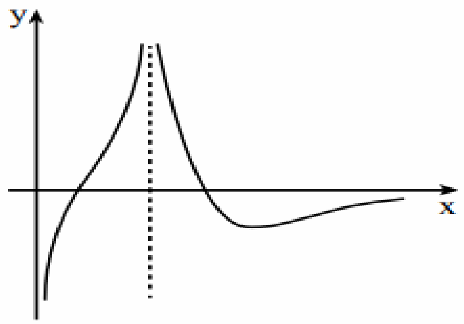
חיתוך עם ציר ה- x: $g'(x)=0 \Rightarrow 2f(x)(2-f(x))=0 \Rightarrow f(x)=0 \; or \; f(x)=2$

כלומר הפתרונות הם: $(9,0)$, $(1,0)$

(4) $g'(x)=\frac{2f(x)(2-f(x))}{positive}$, לפי הנתונים מתקבל –

$g'(x)<0$: $0<x<1$ או $x>9$. (שלילית) $g'(x)>0$: $1<x<9$ (חיובי).

ב.



ג. (1) בעצם נתון שהשיפוע של המשיק שווה ל- 0 - $g'(x)=0 \Rightarrow x=1 \, , \, x=9$.

הנקודה $x=1$ לא בתחום הנתון $x>3$. מכאן שנקודות ההשקה היא $(9,-4)$.

(2) $(9,-4)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה $g(x)$ - ניתן לראות לפי גרף הנגזרת.

מכאן ש- $g(10)<g(9)=-4$

(3) $-\int_9^{10} g'(x)dx=-(g(10)-g(9))=0.5 \Rightarrow g(10)=-4.5$

7. $f'(x)=8\sin 2x\cos 2x=4\sin 4x=0 \Rightarrow 4x=\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}k$.

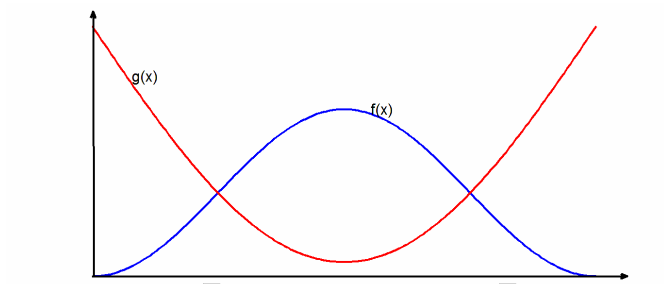
נקודות הקיצון של $f(x)$ - $\left(\frac{\pi}{2},0\right)\min$, $(\frac{\pi}{4},2)\max$, $(0,0)\min$.

מכוון שהפונקציה רציפה ניתן לקבוע min/ max לפי ערכי ה- y.

$g'(x)=-2\sqrt{8}\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$.

נקודות הקיצון של $g(x)$ - $\left(\frac{\pi}{2},3\right)\max$, $(\frac{\pi}{4},3-\sqrt{8})\min$, $(0,3)\max$.

ב.



ג. $2\sin^2 2x=3-\sqrt{8}\sin 2x \Rightarrow 2\sin^2 2x+\sqrt{8}\sin 2x-3=0$.

נגדיר $\sin 2x=t$ ונקבל $2t^2+\sqrt{8}t-3=0 \Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ t=-2.12$.

$\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{8} \quad or \quad 2x=\frac{3}{4}\pi+2\pi k \Rightarrow x=\frac{3}{8}\pi$.

נקודות החיתוך של שני הגרפים הם: $\left(\frac{\pi}{8},1\right)$, $\left(\frac{3\pi}{8},1\right)$.

ד. $S=\int_0^{\pi/8}\left(3-\sqrt{8}\sin 2x-2\sin^2 2x\right)dx=\int_0^{\pi/8}\left(3-\sqrt{8}\sin 2x-1+\cos 4x\right)dx$

כאשר השתמשתי בזהות $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.

$$S=2x+\sqrt{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\pi/8}=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}-\sqrt{2}=0.621$$

8. נגדיר $P\ (t,\frac{4}{\sqrt{t}})$ ולכן השיפוע הוא $m=f'(t)=-\frac{2}{t^{1.5}}$.

משוואת המשיק היא $y-\frac{4}{\sqrt{t}}=-\frac{2}{\sqrt{t}t}(x-t) \Rightarrow y=-\frac{2}{t^{1.5}}x+\frac{6}{\sqrt{t}}$.

נמצא את נקודת החיתוך עם ציר ה- y: $\left(0,\frac{6}{\sqrt{t}}\right)$ נמצא את נקודת החיתוך עם ציר ה- x: $(3t,0)$.

$g(x)=OB+OA=3t+\frac{6}{\sqrt{t}}$. $g'(x)=3-\frac{3}{t\sqrt{t}}=0 \Rightarrow t=1$ לכן נקודה P היא $(1,4)$.

נראה שמדובר במינימום - $g''(x)=\frac{4.5}{t^2\sqrt{t}} \Rightarrow g''(1)=4.5>0 \Rightarrow \min$