מתכונת במתמטיקה 2- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 50 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. מהירות ממוצעת מוגדרת כתוצאה של חילוק מרחק הנסיעה <u>הכולל</u>, בזמן הנסיעה <u>הכולל</u>. רוכב אופניים יוצא מרחובות לחולון ונוסע במהירות קבועה. עם הגעתו לחולון, הוא מסתובב ושב מיד לרחובות. אם יגביר את מהירותו ב- m קמ"ש בדרכו חזור, מהירותו הממוצעת באותו יום תהיה 18 קמ"ש. אם יאט את מהירותו ב- m קמ"ש בדרכו חזור, מהירותו הממוצעת באותו יום תהיה 10 קמ"ש.

א. מצא את ערכו של הפרמטר החיובי m ואת המהירות בה החל הרוכב את נסיעתו באותו יום.

ב. למחרת יצא הרוכב מרחובות לחולון במהירות הנמוכה ב- m קמ"ש מהמהירות בה החל את נסיעתו אתמול. כאשר הגיע לחולון והסתובב בחזרה לרחבות, הגביר את מהירותו ב- 2m קמ"ש. הנסיעה כולה ארכה שעתיים וארבעים דקות. חשב את המרחק בין רחובות לבין חולון.

2. נתונה סדרה חשבונית A_n בעלת שלושה איברים חיובים, שהפרשה 3. אם נעלה בריבוע את האיבר הראשון, נוסיף 19 לשני ונפחית 4 מהשלישי, תתקבל סדרה חשבונית חדשה.

א. מצא את הנוסחא לאיבר כללי של הסדרה A_n ואת שלושת איבריה.

ב. ממשיכים את הסדרה A_n כך שיהיו בה 2n איברים ולאחר מכן מגדירים באמצעותה סדרה חדשה שהיאבר הכללי שלה: $B_n=\left(A_n\right)^2$. נתון כי הסכום: $B_1-B_2+B_3-B_4+...+B_{2n-1}-B_{2n}=-846$.

מצא כמה איברים בסדרה A_n .

3. בכד חמישה כדורים שחורים ושישה לבנים. הראל מוציא כדור ובודק את צבעו. אם הוציא כדור שחור, יחזיר אותו לכד. אם הוציא כדור לבן, ישאיר אותו בחוץ. הראל חזר על התהליך שלוש פעמים.

א. נגדיר כמאורע A את המצב שבו בסוף התהליך, כמות הכדורים השחורים בכד תשתווה לכמות הכדורים הלבנים. חשב את ההסתברות למאורע A.

ב. ידוע שבסוף התהליך היו בכד יותר כדורים שחורים מלבנים. חשב את ההסתברות שהוצא מספר אי זוגי של כדורים לבנים.

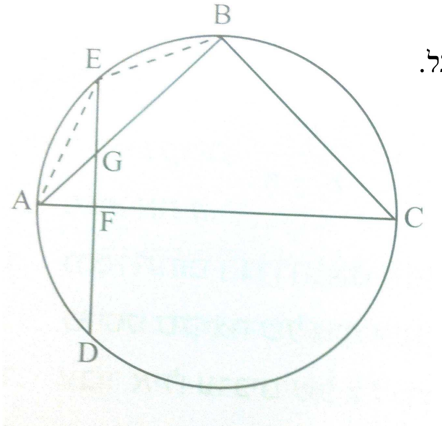
ג. הראל חוזר על התהליך המלא שתואר, פעם אחת בכל יום במשך שישה ימים. חשב את ההסתברות ש:

1) רק בימים הראשון והחמישי, יתרחש המאורע A.

2) רק בשניים משלשת הניסיונות, יתרחש המאורע A

3) רק בשלושת הניסיונות האחרונים מבין השישה, יתרחש המאורע A.

פרק שני – יש לענות על שאלה אחת מבין השאלות 4-5.



4. א. הוכח: מרובע שסכום זוויותיו הנגדיות 180 מעלות ניתן לחסום במעגל.

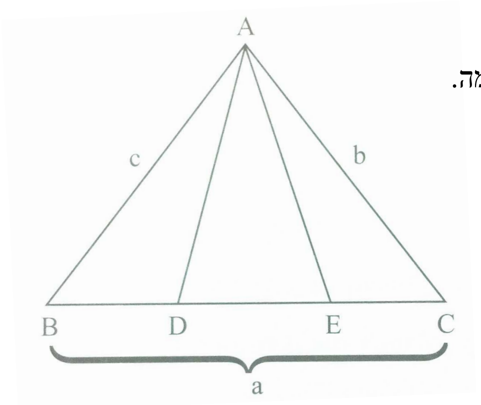
ב. AC הוא קוטר במעגל החוצה את המיתר ED.

E נקודה על הקשת AB. הוכח: $\angle AEB = \angle FGB$.

ג. נתון: AB חוצה את זווית EAF. $AE = EB$.

1. חשב את זווית המשולש AEF.

2. חשב את היחס $\frac{FG}{GE}$



5. במשולש ABC : a, b, c הם אורכי הצלעות AB, AC, BC בהתאמה.

R הוא רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC.

הנקודות D ו- E נמצאות על הצלע BC, כך ש: $\angle ADE = \angle AED = \alpha$

נסמן ב- S_1 את שטח המשולש ADE וב- S_2 את שטח המשולש ABC.

הוכח: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{b \cdot c}{a \cdot R} \cdot \cot\alpha$.

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 6-8

6. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{4x}{(x-a)^2}$, $(a>0)$. בסעיפים הבאים השתמש בפרמטר a במידת הצורך.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחום הגדרה. 2. נקודות הקיצון ואת סוגן. 3. האסימפטוטות המקבילות לצירים

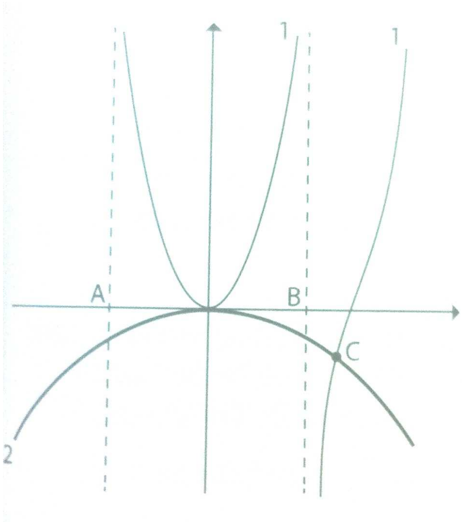
4. נקודות פיתול. 5. תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה.

ב. שרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)=|f(x)|$. מצא כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $g(x)$.

ד. מגדירים פונקציה נוספת: $h(x)=\dfrac{4x}{(x-a)^2}+p$. הבע באמצעות a, במידת הצורך, את ערכו של p,

עבורו יהיה למשוואה: $h(x)=0$ פתרון יחיד.



7. נתונים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=\tan(x^2)$, $f(x)=-2x^2$

האסימפטוטות חותכות את ציר ה- x בנקודות A ו- B.

א. זהה איזה מהגרפים, 1 או 2, מתאים לפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B המופיעות בשרטוט.

ג. נתון: $C(0.43\pi,-3.67)$. מצא את פתרון המשוואה

$\tan(x^2)=-2x^2$ בתחום: $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

ד. נתונה הפונקציה $h(x)=x\cdot\sin(x^2)$. עבור גרף הפונקציה

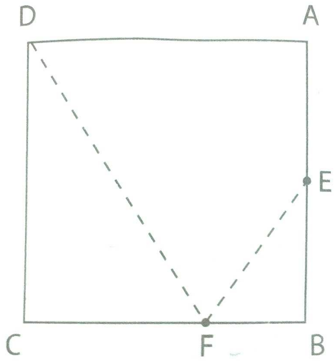
$h(x)$ בתחום $0\le x\le 2.1$:

1. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.

2. מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון הפנימית ואת סוגה.

3. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ה. בהתאם לשרטוט, חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $h(x)$ לבין ציר ה- x ברביע הראשון.



8. האולם ABCD הוא בצורת ריבוע שאורך צלעו 30 מטרים. הנקודה E היא אמצע הקיר AB. מהפינה D מטיחים כדור טניס לכיוון הקיר BC, אשר פוגע בו בנקודה F ומשם נזרק לנקודה E. מהירותו של הכדור לאורך כל תנועתו היא 10 מטרים לשניה (הנח כי לאחר הפגיעה בקיר, הכדור יגיע בוודאות לנקודה E).
מצא מה צריך להיות אורך CF, שעבורו זמן התנועה הכולל של הכדור יהיה מינימלי.

בהצלחה !

1. v - מהירות רוכב האופניים בדרכו הלוך בקמ"ש. x - המרחק בין רחובות לחולון בק"מ.

א. $\frac{x(2v+m)}{v(v+m)} = \frac{x}{v+m} + \frac{x}{v} = t_1$ - זמן כולל עבור המקרה הראשון.

מהירות ממוצעת - $18 = \frac{2v(v+m)}{2v+m} \Leftarrow 18 = \frac{2x}{t_1}$.

באותו אופן עבור המקרה השני - $\frac{x(2v-m)}{v(v-m)} = \frac{x}{v-m} + \frac{x}{v} = t_2$ ולכן $10 = \frac{2v(v-m)}{2v-m} \Leftarrow 10 = \frac{2x}{t_2}$.

מהמשוואה השנייה מתקבל - $2v^2 - 2vm = 20v - 10m \Rightarrow m = \frac{v^2-10v}{v-5}$.

מהמשוואה השנייה מתקבל - $2v^2 + 2vm = 36v + 18m \Rightarrow m = \frac{v^2-18v}{9-v}$

נשווה את m ונקבל $\frac{v^2-18v}{9-v} = \frac{v^2-10v}{v-5} \Rightarrow v^2 - 21v + 90 = 0 \Rightarrow v = 6$, 15

אם נציב $v = 6\ km/h$ נקבל שהפרמטר m שלילי.

לכן מהירות רוכב האופנים בהלוך היא $v = 15 km/h$ וערך הפרמטר m הוא $7.5\ km/h$.

ב. $\frac{8}{3} = \frac{x}{v+m} + \frac{x}{v-m} = t_3$ - הזמן הכולל בפעם השלישית. נציב את m ו- v ונקבל -

$x = 15km \Leftarrow \frac{8}{3} = \frac{x}{22.5} + \frac{x}{7.5}$ - המרחק בין רחובות לחולון הוא 15 ק"מ.

2. א. a_1, a_1+3, a_1+6 - שלושת האיברים בסדרה המקורית. $(a_2+19) - a_1^2 = (a_3-4) - (a_2+19)$

נציב את a_1 , a_2 ונקבל $a_1 = -6$, $a_1 = 7 \Leftarrow 2(a_1+22) - a_1^2 = (a_1+2)$.

האיברים חיובים לכן $a_3 = 13$, $a_2 = 10$, $a_1 = 7$. הביטוי לאבר הכללי הוא $a_n = 7 + 3(n-1) = 3n+4$

ב. $7^2 - 10^2 + 13^2 - 16 + ... + B_{2n-1} - B_{2n} = -846$.

נשתמש בנוסחא $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ עבור כל זוג איברים ונקבל

$(a_1-a_2)(a_2+a_1) + (a_3-a_4)(a_3+a_4) + ... + (a_{2n-1}-a_{2n})(a_{2n}+a_{2n-1}) = -d(a_1+a_2+...+a_{2n})$.

כלומר - $-d(2a_1 + (2n-1)d)\frac{2n}{2} = -846 \Rightarrow 3n(11+6n) = 846 \Rightarrow n = 6$.

לכן בסדרה A_n יש בסך הכול 12 איברים.

3. א. צריך להוציא פעמיים שחור ופעם אחת לבן על מנת שכמות הכדורים תשתווה

$P(A) = p(לבן).p(שחור).p(שחור) + p(שחור).p(שחור).p(לבן) + p(שחור).p(לבן).p(שחור)$

$$P(A) = \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10} + \frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11} + \frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} = 0.373$$

ב. מספר הכדורים השחורים נשאר קבוע לכן על מנת שהיו יותר לבנים צריך להוציא לפחות בשתי נסיונות מתוך השלוש לבן.

$P(B) = p(לבן).p(לבן).p(לבן) + p(לבן).p(שחור).p(לבן) + p(לבן).p(לבן).p(שחור) + p(שחור).p(לבן).p(לבן)$

$$P(B) = \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9} + \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10} + \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9} + \frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} = \frac{6}{11}$$

C – מספר אי זוגי של כדורים לבנים – כלומר או לבן אחד או שלוש.

$P(C\cap B)=p(\text{לבן}).p(\text{לבן}).p(\text{לבן})=0.1515$

$.\,P(C/A)=\dfrac{P(C\cap B)}{P(B)}=0.277$

ג. (1) הימים קבועים לכן $.\,P=p(A)^2(1-p(A))^4=0.0215$

(2) $P=\binom{6}{2}p(A)^2(1-p(A))^4=0.322$

(3) $P=p(A)^3(1-p(A))^3=0.0127$

4. פתרון במיקודית ע"מ 271

5.

לפי משפט הסינוסים ΔABC (חסום במעגל שרדיוסו R) : $.\,\dfrac{a}{\sin\prec BAC}=2R\Rightarrow \sin\prec BAC=\dfrac{a}{2R}$

$.\,S_2=\dfrac{AB\cdot AC}{2}\sin\prec BAC=\dfrac{b\cdot c}{2}\cdot\dfrac{a}{2R}=\dfrac{bca}{4R}$

$\prec ADE=\prec AED=\alpha$ (נתון) ומכאן ש- $AD=AE$ (מול זוויות שוות צלעות שוות).

$\prec DAE=180-2\alpha$ (סכום זוויות במשולש ADE שווה ל- 180 מעלות).

$\prec ADB=180-\alpha$ (זווית צמודה לזווית ADE).

לפי משפט הסינוסים ΔABC : $.\,\dfrac{b}{\sin\prec B}=2R\Rightarrow \sin\prec B=\dfrac{b}{2R}$

במשולש ΔABD על פי משפט הסינוסים:

$$.\,\frac{AD}{\sin\prec B}=\frac{c}{\sin(180-\alpha)}\Rightarrow\frac{AD}{b/2R}=\frac{c}{\sin\alpha}\Rightarrow AD=\frac{cb}{2R\sin\alpha}$$

$$S_1=\frac{AD^2}{2}\sin(\prec DAE)=\frac{c^2b^2}{8R^2}\frac{\sin(180-2\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{c^2b^2}{8R^2}\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{c^2b^2}{8R^2}\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{c^2b^2}{4R^2}\cot\alpha$$

נציב את הביטויים ונקבל $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{c^2b^2}{4R^2}\cot\alpha}{\frac{abc}{4R}}=\dfrac{bc}{aR}\cot\alpha$

6. א. 1) תחום הגדרה - $x\neq a$

(2) $f'(x)=\dfrac{4(x-a)^2-8x(x-a)}{(x-a)^4}=\dfrac{4(-x-a)}{(x-a)^3}=0\Rightarrow x=-a$

$$f''(x)=\frac{-4(x-a)^3+12(x+a)(x-a)^2}{(x-a)^6}=\frac{8x+16a}{(x-a)^4}$$

$f''(-a)=\dfrac{8x+16a}{(x-a)^4}=\dfrac{8a}{positive}>0\Rightarrow \min$. לכן הנקודה $\min\left(-a,-\dfrac{1}{a}\right).$

(3) אסימפטוטה אנכית : $\lim_{x\to a} f(x)=\infty\ \Rightarrow x=a$

אסימפטוטה אופקית: $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

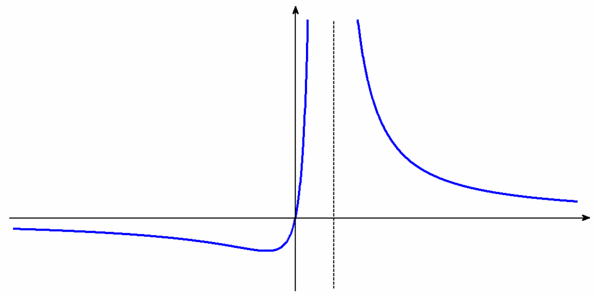
(4) $f''(x) = \frac{8x+16a}{(x-a)^4} = 0 \Rightarrow x = -2a$. נקודת פיתול - $\left(-2a, -\frac{8}{9a}\right)$.

(5) נציב ערכים בין נקודת הפיתול ובין נקודת האי הגדרה ונקבל -

$f''(-3a) < 0$, $f''(0) > 0$, $f''(2a) > 0$. קעירות מעלה - $x \neq a$, $x > -2a$. קעירות מטה $x < -2a$

מומלץ גם למצוא תחומי עליה ירידה.

ב.



ג. על מנת למצוא נקודות קיצון של $g(x) = |f(x)|$ צריך למצוא גם את נקודות התאפסות של $f(x)$ -

$(0,0)$ - כלומר יהיו ל $g(x)$ שתי נקודות קיצון.

ד. $\frac{4x}{(x-a)^2} = -p$ - למשואה הזאת יהיה פתרון יחיד רק כאשר הקו האופקי יעבור דרך נקודת המינימום

(ראה גרף הפונקציה $f(x)$) $-p = -\frac{1}{a} \Rightarrow p = \frac{1}{a}$

7. א. $f(x)$ - היא פרבולה הפוכה – גרף 2. $g(x)$ - היא גרף 1 לטנגנס יש אסימפטוטות.

ב. נמצא את האסימפטוטות של $g(x)$ - $\cos(x^2) \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \pm 0.707\sqrt{\pi}$

לכן נקודה A היא $(-0.707\sqrt{\pi},0) \Rightarrow (-1.25,0)$ ונקודה B היא $(0.707\sqrt{\pi},0) = (-1.25,0)$.

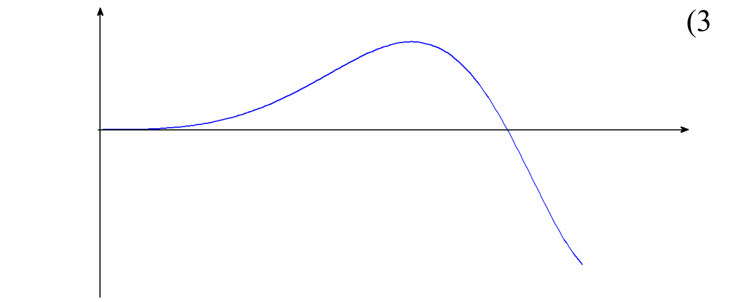
ג. על סמך הציור ניתן לראות שיש פתרון יחיד בתחום הנתון הוא נקודה C - $(0.43\pi,-3.67)$

ד. 1) $h(0) = 0$ ו - $0 = x\cdot\sin(x^2) \Rightarrow x = 0\ , x^2 = \pi k \Rightarrow x = \sqrt{\pi k} \Rightarrow x = 0, x = 1.77$

נקודות החיתוך עם הצירים הם: $(1.77,0)$, $(0,0)$.

2) $h'(x) = \sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2) = 0 \Rightarrow \tan(x^2) = -2x \Rightarrow x = 0.43\pi$

3)



ה. $\int_0^{1.77} x\sin(x^2)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big|_0^{1.77} = 0.5 + 0.5 = 1$

8. $FB=30-x$, $CF=x$ .. $EB=15cm$ - נתון E אמצע הקטע

לפי פתגורס ב- ΔCFD : $DF=\sqrt{30^2+x^2}$. לפי פתגורס ב- ΔFBE : $FE=\sqrt{15^2+(30-x)^2}$

$t=\frac{DF+FE}{10}=\frac{\sqrt{900+x^2}+\sqrt{1125-60x+x^2}}{10}$.

$$t'=\frac{1}{20}\left(\frac{2x}{\sqrt{900+x^2}}+\frac{2x-60}{\sqrt{1125-60x+x^2}}\right)=0\Rightarrow\frac{2x}{\sqrt{900+x^2}}=\frac{2(x-30)}{\sqrt{1125-60x+x^2}}$$

$$x\sqrt{1125-60x+x^2}=(x-30)\sqrt{900+x^2}\ \Rightarrow x^2(1125-60x+x^2)=(x-30)^2(900+x^2)$$

$$-675x^2+54000x-810000=0\Rightarrow x=60\ ,\ x=20$$

$0<x<30$ לכן הנקודה החשודה היא $x=20_m$.

נראה שמדובר בזמן מינימלי $t'(30)=\sqrt{2}>0$, $t'(10)=-0.96<0$ לכן הנקודה היא מינימום.