מבחן מס' 1

משך הבחינה: שעתיים ורבע

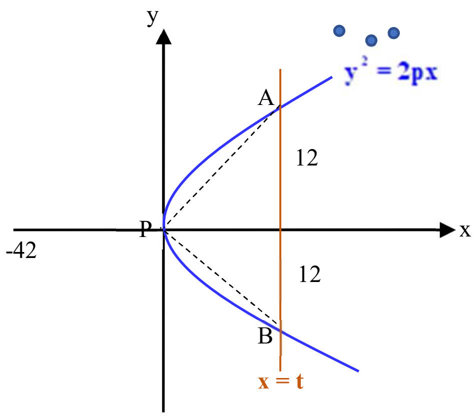
פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

.1 הישר $x = t$ חותך את הפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודות A ו- B (הנקודה A נמצאת ברביע הראשון). אורך המיתר AB הוא 24 . הנקודה P נמצאת על הפרבולה , משמאל לנקודה A , כך שהשטח המקסימלי של המשולש ABP הוא 72.

א. (1) מצא את t ואת משוואת הפרבולה.
(2) האם המיתר AB עובר דרך מוקד הפרבולה F ? נמק.

ב. הנקודה C נמצאת על המיתר AB כך שמתקיים : $AC:CB = 1:7$.
ישר המקביל לציר ה- x ועובר בנקודה C חותך את הפרבולה בנקודה D ואת מדריך הפרבולה בנקודה E .
(1) מצא את שיעורי הנקודה D .
(2) חשב את היקף המשולש EDF .

ג. הנקודה D היא מרכזו של מעגל המשיק לציר ה- y ומשיק מבחוץ למעגל $x^2 + y^2 = 12x$ בנקודה K . מצא את שיעורי הנקודה K .

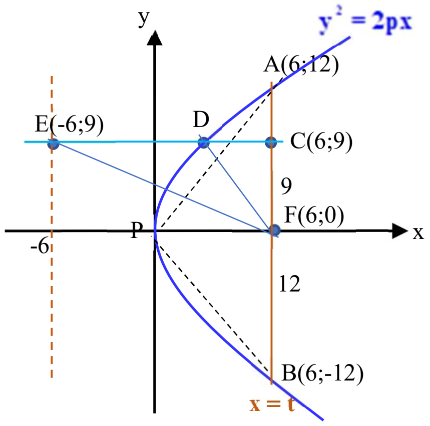


פתרון:

א. 1) הפרבולה $y^2 = 2px$ סימטרית ביחס לציר ה- x לכן
הנקודה B סימטרית לנקודה A ביחס לציר ה- x , לכן ,
אם אורך הקטע AB הוא 24 , אז שיעור ה- y של
הנקודה A הוא 12 . השטח המקסימלי של המשולש
ABP מתקבל כאשר הנקודה P נמצאת בקודקוד
הפרבולה , כלומר, בראשית הצירים . מקבלים:

$$72 = \frac{24 \cdot t}{2} \Rightarrow \mathbf{t = 6}$$.

שיעורי הנקודה A המתקבלת באופן זה : $A(6;12)$. מקבלים:
$12^2 = 2p \cdot 6 \Rightarrow p = 12$. משוואת הפרבולה היא $\mathbf{y^2 = 24x}$.



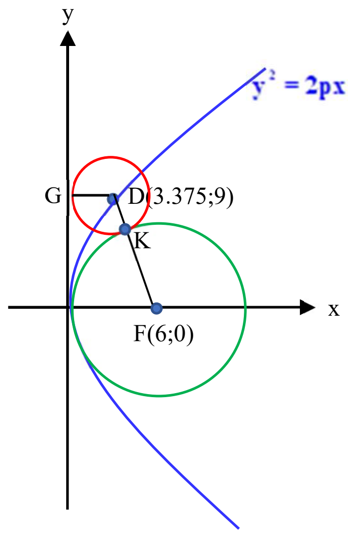
2) $p = 12$ לכן שיעורי מוקד הפרבולה הם $F(6;0)$ ⇐ המיתר AB הנמצא על הישר $x = 6$ **עובר** דרך מוקד הפרבולה .

ב. 1) $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{7} \Rightarrow y_C = \frac{12 \cdot 7 - 12}{8} = 9 \Rightarrow C(6;9)$, $x_C = x_A = 6$

$$x_D = 3.375 \Leftarrow 9^2 = 24x_D \Leftarrow y_D = y_C = 9$$

$\Leftarrow$ **D(3.375;9)**

2) $DF = DE = 3.375 + 6 = 9.375$ (מרחק הנקודה D ממוקד הפרבולה שווה למרחקה מן המדריך.
שיעורי הנקודה E : $E(-6;9)$.



אורך הצלע EF : $EF=\sqrt{(6+6)^2+(0-9)^2}=15$

היקף המשולש EDF : $9.375\cdot 2+15=\mathbf{33.75}$

ג. המעגל הנתון: $x^2+y^2=12x \Rightarrow x^2-12x+y^2=0$

$\Leftarrow (x-6)^2+y^2=36 \Leftarrow$ מרכז המעגל בנקודה F (6;0)

ורדיוס המעגל הוא 6 .

המעגל המשיק למעגל $x^2+y^2=12x$ בנקודה K ומשיק לציר ה- y בנקודה G , מרכזו בנקודה D(3.375;9) , רדיוסו 3.375.

נקודת ההשקה K נמצאת על קטע המרכזים DF ומתקיים: $KF=6$, $DK=3.375$. לכן , הנקודה K מחלקת את הקטע ביחס $\frac{DK}{KF}=\frac{3.375}{6}=\frac{9}{16}$ $\Leftarrow$ מקבלים:

$$x_K=\frac{3.375\cdot 16+6\cdot 9}{25}=4.32\ ,\ y_K=\frac{9\cdot 16+0\cdot 9}{25}=5.76\Rightarrow \mathbf{K(4.32;5.76)}$$

2. נתונים הישרים : $\ell_1 : \underline{x} = (1;0;0) + t(2;2;-3)$ ו- $\ell_2 : \underline{x} = (2;0;0) + m(1;1;-2)$.

א. הראה שהישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 מצטלבים.

ב. 1) מצא הצגה פרמטרית של מישור π_1 המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לישר ℓ_2 .

2) מצא את משוואת המישור π_1 .

ג. מצא הצגה פרמטרית של ישר ℓ_3 המוכל במישור π_1 , מקביל לישר ℓ_2 ועובר בנקודה $(k;0;2)$

ד. 1) מישור π_2 נקבע על-ידי הישרים ℓ_2 ו- ℓ_3 . מצא הצגה פרמטרית של ישר ℓ_4 העובר בנקודה $(2;0;0)$ ומאונך למישור π_2 .

2) הישר ℓ_4 חותך את המישור π_1 בנקודה P . הנקודה $A(3;2;-3)$ נמצאת על הישר ℓ_1 , הנקודה $B(1;0;2)$ נמצאת על הישר ℓ_3 והנקודה C נמצאת על הישר ℓ_2 .
מצא את נפח הפירמידה CABP .

<u>פתרון</u>:

א. וקטורי הכיוון $(1;1;-2)$ ו- $(2;2;-3)$ בלתי תלויים (לא קיים מספר α עבורו מתקיים $(2;2;-3) = \alpha(1;1;-2)$) , לכן , הישרים נחתכים או מצטלבים. נבדוק האם יש נקודה משותפת:

נקודה כללית על ℓ_1 תהיה $(1 + 2t;2t;-3t)$ ונקודה כללית על ℓ_2 : $(2 + m;m;-2m)$.

נקודה משותפת צריכה לקיים: $1 + 2t = 2 + m$ וגם $2t = m$ וגם $-3t = -2m$

לפי שתי המשוואות הראשונות מקבלים $1 + 2t = 2 + 2t$ ומקבלים שאין פתרון למערכת.

מסקנה: הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 **מצטלבים**.

ב. 1) המישור π_1 מכיל את הנקודה $(1;0;0)$הנמצאת על ℓ_1 והכיוון $(2;2;-3)$ הוא אחד מווקטורי הכיוון של π_1. המישור מקביל לישר ℓ_2 לכן הווקטור $(1;1;-2)$ הנו וקטור כיוון נוסף של המישור π_1 . מתקבלת ההצגה הפרמטרית: $\boldsymbol{\pi_1 : \underline{x} = (1;0;0) + p(2;2;-3) + q(1;1;-2)}$

2) ניעזר במכפלה וקטורית של שני וקטורי הכיוון למציאת הווקטור האנך לכל אחד מהם, הווקטור האנך למישור π_1 :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = x(-4+3) - y(-4+3) + z(2-2) + d = 0 \Rightarrow .$$

$- x + y + d = 0 \Leftarrow$ הווקטור האנך למישור הוא $(-1;1;0)$. בדיקה:

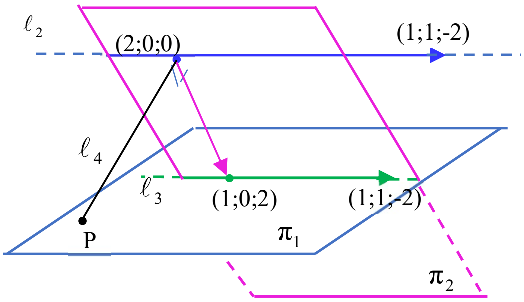
$(-1;1;0)\cdot(2;2;-3) = -2 + 2 = 0$, $(-1;1;0)\cdot(1,1,-2) = - 1 + 1 = 0$.

נציב את הנקודה $(1;0;0)$ ונקבל: $- 1 + d = 0 \Leftarrow d = 1$. משוואת המישור π_1 :

$-x + y + 1 = 0 \Leftarrow \mathbf{x - y - 1 = 0}$.

ג. הנקודה $(k;0;2)$ נמצאת במישור π_1

לכן: $k - 1 = 0 \Leftarrow k = 1$



מתקבלת הנקודה (1;0;2) .

ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ_3 היא:

$$\mathbf{l_3 : \underline{x} = (1;0;2) + r(1;1;-2)}$$

ד. 1) וקטורי הכיוון של מישור π_2 הם :

(1;1;-2) – וקטור הכיוון של ℓ_3

והווקטור המחבר את הנקודות (2;0;0)

ו- (1;0;2) הנמצאות על הישרים המקבילים ℓ_1 ו- ℓ_3 , כלומר הווקטור (1;0;-2) .

נמצא את הווקטור האנך למישור בעזרת מכפלה ווקטורית :

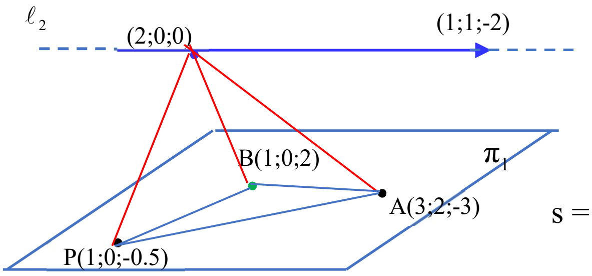
$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2 \ , \ y = -2 + 2 = 0 \ , \ z = 0 - 1 = -1 \Rightarrow$$

מתקבל הווקטור (-2;0;-1) . בדיקה: $(1;1;-2)\cdot(-2;0;-1) = -2 + 2 = 0$,

$(1;0;-2)\cdot(-2;0;-1) = -2 + 2 = 0$. הווקטור (-2;0;-1) הוא וקטור הכיוון של הישר ℓ_4 .

ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ_4 היא: $\mathbf{l_4 : \underline{x} = (2;0;0) + s(2;0;1)}$

2) הישרים ℓ_1 ו- ℓ_3 מוכלים במישור π_1 לכן



הנקודות A(3;2;-3) , B(1;0;2) נמצאות על המישור.

נמצא את הנקודה P בה חותך הישר ℓ_4 את

המישור π_1 : נקודה כללית על הישר ℓ_4 היא

(2 + 2s;0;s). נציב במשוואת המישור

$x - y - 1 = 0$ ונקבל: $2 + 2s - 1 = 0 \Leftarrow s = -0.5$

מתקבלת הנקודה P(1;0;- 0.5).

$$\overrightarrow{AP} = (-2;-2;2.5) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{14.25} \ . \qquad \overrightarrow{AB} = (-2;-2;5) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{33}$$

$(-2;-2;5) \neq \alpha(-2;-2;2.5)$ לכן הנקודות A , B ו- P אינן על אותו ישר .

נחשב את שטח המשולש APB:

$$\cos\sphericalangle BAP = \frac{(-2;-2;5)\cdot(-2;-2;2.5)}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{14.25}} = \frac{20.5}{\sqrt{470.25}} = 0.945 \Rightarrow \sphericalangle BAP = 19.03^\circ$$

$$S_{\Delta APB} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{33}\cdot\sqrt{14.25}\cdot\sin 19.03^\circ = 3.535 \ .$$

הישר ℓ_2 מקביל למישור π_1 לכן כל נקודה עליו נמצאת באותו מרחק מן המישור. מקבלים את

גובה הפירמידה : $h = \frac{|2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. נפח הפירמידה: $V = \frac{3.535\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{3} = \mathbf{0.833}$

3. א. 1) פתור את המשוואה: $z^4 = \dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3}$.

2) הראה שפתרונות המשוואה נמצאים על מעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור של גאוס ומצא את משוואת המעגל.

ב. z_k הוא אחד הפתרונות של המשוואה , $0 \le k \le 3$.

1) הראה כי $\left[(\sqrt{3}+i)\cdot z_k\right]^4$ הוא מספר מדומה טהור.

2) האם iz_k הוא פתרון של המשוואה? נמק.

<u>פתרון</u>:

א. 1) נמצא הצגה טריגונומטרית למספר $-1+\sqrt{3}\cdot i$:

$$R=\sqrt{1+3}=2 \text{ , } \tan\theta=-\sqrt{3} \Rightarrow \theta=-60^\circ+180^\circ k \text{ ,} 90^\circ<\theta<180^\circ \Rightarrow \theta=120^\circ$$

המספר הוא: $2\text{cis}120^\circ \Leftarrow$

נמצא הצגה טריגונומטרית למספר $\sqrt{3}-i$:

$$R=\sqrt{3+1}=2 \text{ , } \tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=-30^\circ+180^\circ k \text{ ,} 270^\circ<\theta<360^\circ \Rightarrow \theta=330^\circ$$

המספר הוא: $2\text{cis}330^\circ \Leftarrow$

מקבלים:

$$z^4=\frac{\left(2\text{cis}120^\circ\right)^5}{\left(2\text{cis}330^\circ\right)^3}=\frac{2^5\text{cis}\left(600^\circ\right)}{2^3\text{cis}\left(990^\circ\right)}=\frac{2^5\text{cis}\left(240^\circ\right)}{2^3\text{cis}\left(270^\circ\right)}=4\text{cis}\left(-30^\circ\right)=4\text{cis}\left(330^\circ\right)\Rightarrow$$

$$z^4=4\text{cis}\left(330^\circ+360^\circ k\right)\Rightarrow z_k=\sqrt{2}\text{cis}\left(82.5^\circ+90^\circ k\right)\Rightarrow$$

$$\mathbf{z_1=\sqrt{2}cis\left(82.5^o\right), z_2=\sqrt{2}cis\left(172.5^o\right), z_3=\sqrt{2}cis\left(262.5^o\right), z_4=\sqrt{2}cis\left(352.5^o\right)}$$

2) ארבעת פתרונות המשוואה נמצאים על המעגל הקנוני $\mathbf{x^2+y^2=2}$

ב. 1) $\sqrt{3}+i=2\text{cis}30^\circ$, $\left(z_k\right)^4=4\text{cis}\left(330^\circ\right)$ עבור $0\le k\le 3$ $\Leftarrow$

$$\left[(\sqrt{3}+i)\cdot z_k\right]^4=\left(2\text{cis}30^\circ\right)^4\cdot 4\text{cis}\left(330^\circ\right)=64\text{cis}\left(120^\circ+330^\circ\right)=64\text{cis}\left(90^\circ\right)\Rightarrow$$

התקבל מספר מדומה טהור $\left[(\sqrt{3}+i)\cdot z_k\right]^4=64i$

(2 $\left(iz_k\right)^4=\left(i\right)^4\left(z_k\right)^4=1\cdot 4\text{cis}\left(330^\circ\right)=4\text{cis}\left(330^\circ\right)\Rightarrow$

iz_k הוא פתרון של המשוואה $z^4=4\text{cis}\left(330^\circ\right)$

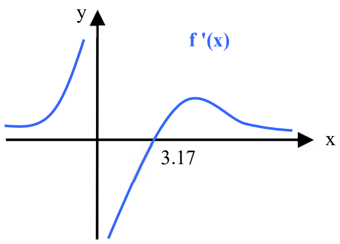
פרק שני- גדילה ודעיכה, פונקציית חזקה , פונקציה מעריכית ולוגריתמית

4. א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-x}{x^2}$.

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) מצא לגרף הפונקציה $f(x)$ אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. בציור שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



גרף הפונקציה $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=3.17$.

1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת : $g'(x)=f(x)$. נתון : $g(1)=0$.

1) נתון: $f(1.77)=0$. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

2) מצא את הפונקציה $g(x)$.

3) הישר $x=0$ הנו האסימפטוטה היחידה לגרף הפונקציה $g(x)$.

חשב $g(10)$ ו- $g(-10)$ וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

4) חשב את השטח המוגבל בין גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ והישרים $x=4$ ו- $x=6$.

<u>פתרון</u> :

א. 1) תחום ההגדרה: $\mathbf{x\neq 0}$.

2) $x\to 0^+\Rightarrow y\to\infty, x\to 0^-\Rightarrow y\to\infty$. $\Leftarrow$ הישר $\mathbf{x=0}$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

$x\to\pm\infty\Rightarrow y\to\frac{-1}{x}\to 0$. $\Leftarrow$ הישר $\mathbf{y=0}$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

ב. 1) $f(3.17)=-0.18$.

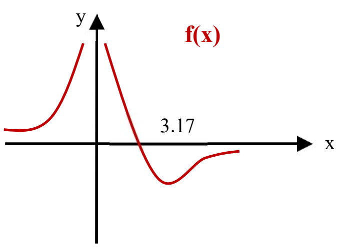
x	$<x<$	0	$<x<$	3.17	$<x$
$f'(x)$	+		-	0	+
$f(x)$	↗		↘	min	↗

מקבלים: **(3.17;-0.18)** נקודת מינימום של $f(x)$

2) **תחומי העלייה:** $\mathbf{x<0\ ,\ x>3.17}$;

תחום הירידה: $\mathbf{0<x<3.17}$

(3



ג. 1)

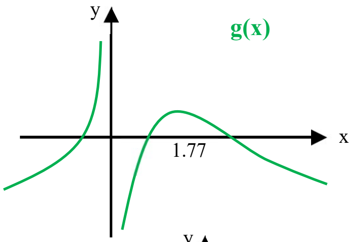
x	$<x<$	0	$<x<$	1.77	$<x$
$g'(x)$	+		+	0	-
$g(x)$	↗		↗	Max	↘

תחומי העלייה: $x < 0 \; , \; 0 < x < 1.77$; תחום ירידה : $x > 1.77$

2) $g'(x) = f(x)$ לכן:

$$g(x) = \int f(x)dx = \int \frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x^2}dx = \int \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{x}{x^2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow$$

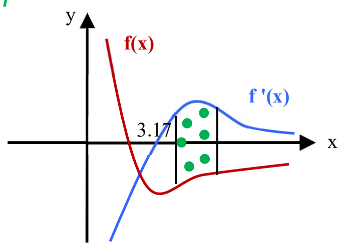
$g(x) = -e^{\frac{1}{x}} - \ln|x| + c$. נתון $g(1) = 0$ ונקבל:



$$0 = -e - 0 + c \Rightarrow c = e \Rightarrow \mathbf{g(x) = -e^{\frac{1}{x}} - \ln|x| + e}$$

3) $\mathbf{g(10) = -0.69 \, , \, g(-10) = -0.49}$

4) $S = \int_4^6 [f'(x) - f(x)]d(x) = [f(x) - g(x)]_4^6 =$



$$[f(6) - g(6)] - [f(4) - g(4)] =$$

$$(-0.134 + 0.255) - (-0.17 - 0.048) = \mathbf{0.339}$$

5. א. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה בתחום $x > 3$. נתון: $f'(x) = \frac{1}{x-3}$, $f(4) = \ln 3$.

הראה כי : $f(x) = \ln(3x - 9)$.

ב. 1) הראה שהפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

4) מגדירים פונקציה $S(x)$ המקיימת: $S(x) = \int_{3.1}^{x} f(t)dt$ בתחום $3.1 \le x \le 4$.

מצא את הערך של x עבור $S(x)$ מינימלי ואת הערך של x עבור $S(x)$ מקסימלי. נמק.

ג. בטא את x באמצעות $f(x)$ והראה כי $x = \frac{1}{3}e^{f(x)} + 3$.

ד. נתונה פונקציה נוספת: $g(x) = \frac{1}{3}e^{x} + 3$.

1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

2) מצא לפונקציה $g(x)$ אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x .

3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

4) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$, ציר y והישר $y = 6$.

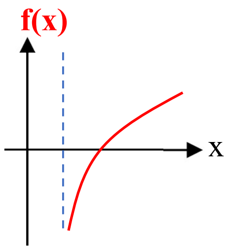
5) האם תוכל לומר, על סמך הסעיפים הקודמים , מהו השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ציר x והישר $x = 6$? נמק.

פתרון:

א. $f(x) = \int \frac{1}{x-3}dx = \ln|x-3| + c$. נתון $x > 3$ לכן $|x-3| = x-3$. $f(4) = \ln 3$, לכן :

$\ln 3 = \ln(4-3) + c \Rightarrow c = \ln 3 \Rightarrow f(x) = \ln(x-3) + \ln 3 = \ln[3(x-3)] \Rightarrow$

$\mathbf{f(x) = \ln(3x - 9)}$

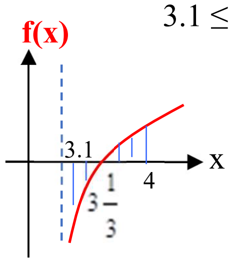


ב. 1) $f'(x) = \frac{1}{x-3}$, $x > 3$ $\Leftarrow$ $f'(x) > 0$ $\Leftarrow$ $f(x)$ עולה בתחום $x > 3$.

2) $x > 3$ לכן אין חיתוך עם ציר ה- y .

3) $0 = \ln(3x-9) \Rightarrow 3x-9 = 1 \Rightarrow x = 3\frac{1}{3} \Rightarrow \mathbf{(3\frac{1}{3};0)}$

4) הפונקציה $S(x)$ מייצגת את צבירת השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה- x בתחום $3.1 \le x \le 4$. ככל שמצטבר שטח גדול יותר בתחום $3.1 \le x \le 3\frac{1}{3}$



מתווספים לערכי הפונקציה $S(x)$ ערכים שליליים . עבור $x > 3\frac{1}{3}$

יתווספו ערכים חיוביים ולכן ערכי הפונקציה $S(x)$ יעלו.

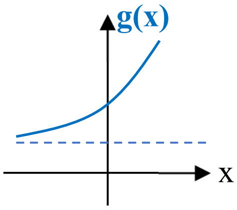
הערך המינימלי יתקבל עבור $x = 3\frac{1}{3}$ והערך המקסימלי יתקבל

עבור $x = 4$.

ג. $f(x)=\ln(3x-9)\Rightarrow e^{f(x)}=3x-9\Rightarrow 3x=e^{f(x)}+9\Rightarrow \mathbf{x=\frac{1}{3}e^{f(x)}+3}$

ד. 1) $g(x)=\frac{1}{3}e^{x}+3\Rightarrow g(0)=3\frac{1}{3}\Rightarrow \mathbf{(0;3\frac{1}{3})}$.

$0=\frac{1}{3}e^{x}+3\Rightarrow e^{x}=-9\Rightarrow$ אין פתרון

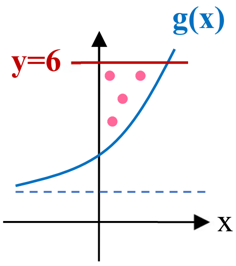


2) הפונקציה g(x) מוגדרת לכל ערך של x ואין לה אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x .

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y :

אין אסימפטוטה $x\to\infty\Rightarrow y\to\infty\Rightarrow$,

3) אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $x\to-\infty\Rightarrow y\to 3\Rightarrow \mathbf{y=3}$

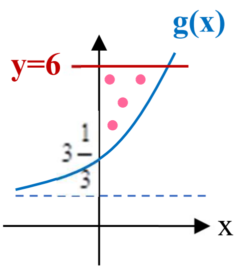


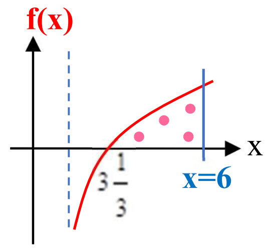
4) שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה g(x) עם הישר y = 6 :

$\frac{1}{3}e^{x}+3=6\Rightarrow \frac{1}{3}e^{x}=3\Rightarrow e^{x}=9\Rightarrow x=\ln 9$

נקבל: $S=\int_0^{\ln 9}\left[6-\left(\frac{1}{3}e^{x}+3\right)\right]dx=\int_0^{\ln 9}\left(3-\frac{1}{3}e^{x}\right)dx=$

$=\left[3x-\frac{1}{3}e^{x}\right]_0^{\ln 9}=\left(3\ln 9-\frac{1}{3}e^{\ln 9}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)=3\ln 9-3+\frac{1}{3}=\mathbf{3.925}$





5) הפונקציה g(x) התקבלה על ידי היפוך בין המשתנים x ו- f(x) לכן השטח המוגבל בין גרף הפונקציה f(x) , ציר ה- x והישר x = 6 שווה לשטח המוגבל בין גרף הפונקציה g(x) , ציר ה- y והישר y = 6 . השטח הוא: **3.925**

מבחן מס' 2

<u>משך הבחינה</u>: שעתיים ורבע

<u>פרק ראשון:</u> גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענה על <u>שתיים שאלות</u> מן השאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות)

1. א. מצא את משוואות שני הישרים העוברים דרך הנקודה (-2;-2) ונמצאים במרחק 3 מן הנקודה (-5;2) .

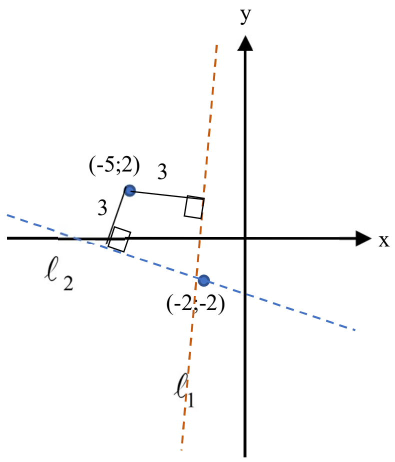
ב. את אחד הישרים שמצאת בסעיף א' המקביל לציר ה- y נסמן ב - ℓ_1. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מן הישר ℓ_1 שווה למרחקן מן הנקודה N(2;0) .

ג. נסמן ב- ℓ_2 את הישר השני שקיבלת בסעיף א'. מצא משוואת מעגל שמרכזו על חלקו החיובי של ציר ה- x ומשיק גם לישר ℓ_1 וגם לישר ℓ_2.

ד. 1) הסבר מדוע המעגל שמצאת בסעיף ג' חותך את המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ב' בשתי נקודות (ניתן להיעזר בציור מתאים).

2) נסמן ב- M את מרכזו של המעגל שמצאת בסעיף ג'. A היא אחת מנקודות החיתוך של המעגל M עם המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ב'. מרחק הנקודה A מן הישר ℓ_1 הוא d .
הבע בעזרת d את היקף המשולש AMN.

<u>פתרון:</u>



א. נסמן ב- m את שיפוע הישר המבוקש. משוואת הישר העובר בנקודה (-2;-2) היא : $y + 2 = m(x + 2)$ $\Leftarrow$ $y - mx + 2 - 2m = 0$. מקבלים:

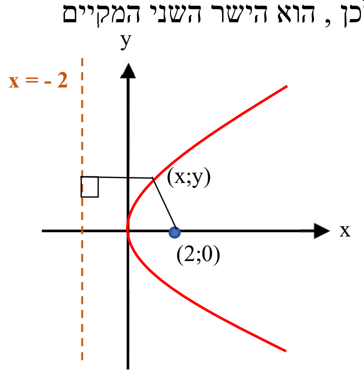
$$\frac{|2+5m+2-2m|}{\sqrt{1+m^2}} = 3 \Rightarrow |4+3m| = 3\sqrt{1+m^2} \Rightarrow$$

$$16+24m+9m^2 = 9(1+m^2) \Rightarrow 24m = -7$$

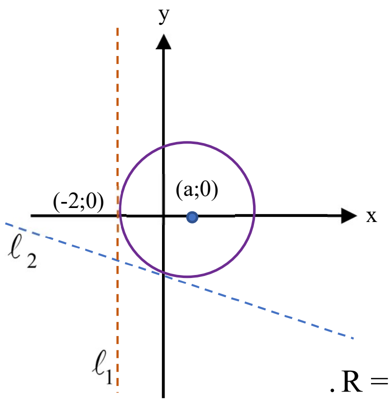
$\Leftarrow m = -\frac{7}{24} \Leftarrow$ התקבל הישר

$\mathbf{24y + 7x + 62 = 0} \Leftarrow y + \frac{7}{24}x + 2 - 2\cdot\left(-\frac{7}{24}\right) = 0$.

נבדוק ישר מקביל לציר ה- y ששיפועו איננו מוגדר , העובר בנקודה (-2;-2) , כלומר הישר x = - 2 . מרחק הישר **x = - 2** מן הנקודה (-5;2) הוא 3 , לכן , הוא הישר השני המקיים את התנאי.



ב. כל נקודה על המקום הגיאומטרי המבוקש נמצאת במרחקים שווים מן הישר x = - 2 ומן הנקודה (2;0) , לכן , היא נמצאת על פי ההגדרה , על פרבולה קנונית $y^2 = 2px$ שמוקדה בנקודה (2;0) . לכן, $\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow$ משוואת הפרבולה היא $\mathbf{y^2 = 8x}$.



ג. נסמן את מרכז המעגל $(a;0)$, $a > 0$. הנקודה נמצאת במרחקים שווים מן הישרים ℓ_1 וגם מישר ℓ_2.

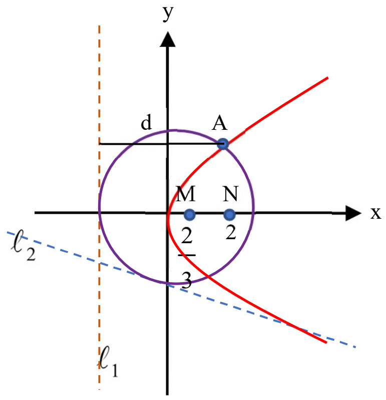
מרחק הנקודה מן הישר $x = -2$ הוא $a + 2$.

מרחק הנקודה מן הישר $24y + 7x + 62 = 0$ הוא $\frac{|24\cdot 0 + 7a + 62|}{\sqrt{24^2 + 7^2}}$. נקבל:

$$\frac{|7a + 62|}{25} = a + 2 \ ,\ 7a + 62 > 0 \Rightarrow 7a + 62 = 25a + 50 \Rightarrow$$

מרכז המעגל $\left(\frac{2}{3};0\right) \Leftarrow 18a = 12 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3};0\right)$, $R = a + 2 = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

מתקבלת המשוואה $\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^2 + \mathbf{y}^2 = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{9}}$.



ד. 1) הפרבולה והמעגל נחתכים **בשתי נקודות** הנמצאות ברביע הראשון וברביע הרביעי.

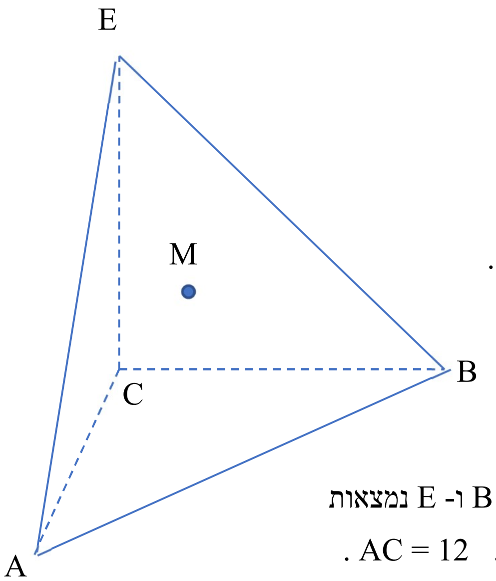
2) הנקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2 = 8x$, לכן מרחקה מן המדריך $x = -2$ שווה למרחקה מן המוקד $N(2;0)$.
מקבלים: $AN = d$.

הנקודה A נמצאת על המעגל $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{64}{9}$

לכן מרחקה מן המרכז $M(\frac{2}{3};0)$ שווה לרדיוס המעגל.

מקבלים $AM = 2\frac{2}{3}$. $MN = 2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$. היקף המשולש AMN הוא:

$d + 2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = \mathbf{d + 4}$.



2. ABCE פירמידה משולשת . נתון: $CA = CB = CE$,
$CA \perp CB$, $EC \perp CA$, $EC \perp CB$. הנקודה M
היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ABE .

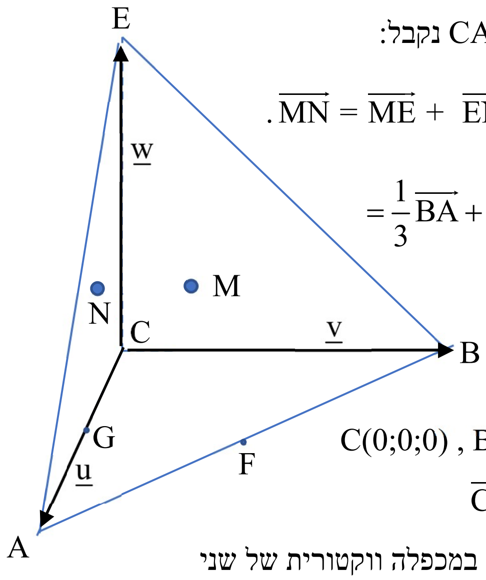
א. 1) הסבר מדוע הפירמידה ABCE היא פירמידה ישרה.
2) הראה ש- CM מאונך למישור הפאה ABE.
3) מהי הזווית בין הקטע CM לקטע EB ? נמק.

ב. הנקודה N היא נקודת מפגש התיכונים בפאה ACE.
הוכח : $MN \parallel BC$.

ג. נתון : הנקודה C נמצאת בראשית הצירים . הנקודות A , B ו- E נמצאות
על החלקים החיוביים של ציר x , ציר y וציר z בהתאמה. $AC = 12$.
1) מצא את משוואת המישור EMC.
2) BN חותך את מישור המשולש EMC בנקודה P. חשב את היחס $\frac{BP}{PN}$.

<u>פתרון:</u>

א. 1) $CA = CB = CE$ לכן ABCE פירמידה ישרה שבסיסה המשולש ABE .
2) המשולשים ACE , BCE ו- ABC חופפים לכן המשולש ABE שווה-צלעות. M מפגש התיכונים
במשולש שווה-צלעות , לכן גם מפגש האנכים האמצעיים של המשולש . לכן, M מרכז המעגל
החוסם את הבסיס ABE והקטע CM הוא הגובה לבסיס של הפירמידה .
3) CM מאונך למישור ABE לכן הוא אנך לכל וקטור במישור .



ב. נסמן : $\overrightarrow{CA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CE} = \underline{w}$. F אמצע AB ו- G אמצע CA נקבל:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\right) + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(-\underline{v} + \underline{u}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\underline{u} =$$

$$= -\frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{u} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\underline{v} \Rightarrow MN \parallel BC$$

ג. 1) על פי הנתונים מקבלים : $E(0;0;12)$, $A(12;0;0)$, $B(0;12;0)$, $C(0;0;0)$
$N(4;0;4)$, $M(4;4;4) \Leftarrow \overrightarrow{CE} = (0;0;12)$, $\overrightarrow{CM} = (4;4;4)$
כיוון הישר CM הוא (1;1;1) וכיוון ישר CE הוא (0;0;1) . ניעזר במכפלה וקטורית של שני
הווקטורים (1;1;1) ו- (0;0;1) שתוצאתה וקטור המאונך לכל אחד מהם ונקבל:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x(1\text{-}0) - y(1\text{-}0) + z(0\text{-}0) + d = 0 \Rightarrow x - y + d = 0$$

המישור עובר דרך ראשית הצירים C לכן משוואת המישור EMC היא : $\mathbf{x - y = 0}$

2) $\overrightarrow{BN} = (4;-12;4) \Leftarrow$ ווקטור הכיוון של הישר BN הוא $(1;-3;1)$. ההצגה הפרמטרית של הישר BN היא $\underline{x} = (0;12;0) + t(1;-3;1)$. נוכל לסמן : $P(t;12\text{-}3t;t)$ ונציב את שיעוריה במשוואת המישור EMC: $t-(12\text{-}3t) = 0 \Leftarrow 4t = 12 \Leftarrow t = 3$. מקבלים :

$\Rightarrow P(3;12\text{-}9;3) \Rightarrow P(3;3;3) \Rightarrow \overrightarrow{BP} = (3;3-12;3) = (3;-9;3) \Rightarrow$.

$\overrightarrow{BP} = 3(1;-3;1)$.

$$\overrightarrow{PN} = (4-3;0-3;4-3) \Rightarrow \overrightarrow{PN} = (1;-3;1) \Rightarrow \frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PN}} = \mathbf{3}$$

3. א. פתור את המשוואה: $2i\,\bar{z} + 3z + 18 = |z|^2$.

ב. הנקודה A נמצאת ברביע השני במישור של גאוס ומייצגת את אחד הפתרונות של המשוואה.
הנקודה A מייצגת את הקודקוד A של מצולע משוכלל בעל n צלעות, $n > 4$.
הנקודות ....., B , C , D , E מייצגות את שאר הקודקודים על פי סדר האותיות, נגד כיוון השעון. המספר $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 5i)$ מייצג את הקודקוד D של המצולע.

1) מצא את n .

2) מצא את שטח המצולע.

ג. קודקודי המצולע מתאימים לפתרונות המשוואה $z^n = a + bi$.

1) מצא את המספר $a + bi$.

2) המספר המרוכב z_k , $1 \le k \le n$, הנו אחד מפתרונות המשוואה.
הראה שהנקודות המתאימות למספרים z_k ו- z_{k+4} נמצאות על ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים.

3) נסמן $z_k = r\text{cis}\theta$. הראה כי $z_{k+4} = -r\text{cis}\theta$.

<u>פתרון:</u>

א. נסמן: $z = x + yi$ ונקבל: $2i\,(x-yi) + 3(x+yi) + 18 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \Leftarrow$

$$2xi + 2y + 3x + 3yi) + 18 = x^2+y^2 \Rightarrow (3x+2y+18)+(2x+3y)i = (x^2+y^2)+0i \Rightarrow$$

$$3x+2y+18 = x^2+y^2 \cap 2x+3y=0 \Rightarrow x=-1.5y \Rightarrow 3(-1.5y)+2y+18=(-1.5y)^2+y^2$$

$$\Rightarrow 3.25y^2+2.5y-18=0 \Rightarrow y_1=2\ ,\ y_2=-\frac{36}{13} \Rightarrow x_1=-3\ ,\ x_2=\frac{54}{13}$$

מתקבלים הפתרונות: $\mathbf{-3+2i}$, $\mathbf{\frac{54}{13}-\frac{36}{13}i}$

ב. 1) נמצא הצגה פרמטרית של המספר $z_A = -3+2i$:

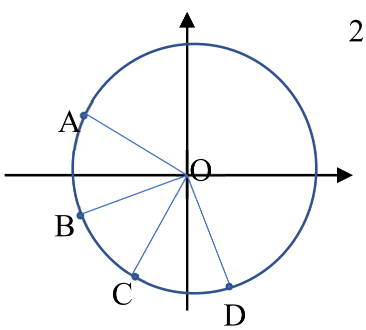
$$R=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\ ,\ \tan\theta=-\frac{2}{3} \Rightarrow \theta=-33.69^\circ+180^\circ k\ ,\ 90^\circ<\theta<180^\circ$$

$$\Rightarrow \theta=146.31^\circ \Rightarrow z_A=\sqrt{13}\cdot\text{cis}(146.31^\circ)$$

נמצא הצגה פרמטרית של המספר $z_D = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-5i)$:

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{13}\ ,\ \tan\theta=-5 \Rightarrow \theta=-78.69^\circ+180^\circ k\ ,$$

$$270^\circ<\theta<360^\circ \Rightarrow \theta=281.31^\circ \Rightarrow z_A=\sqrt{13}\cdot\text{cis}(281.31^\circ)$$



הזווית המרכזית $\measuredangle AOB$ המתאימה לזווית המרכזית הנוצרת בין כל שני קודקודים סמוכים של המצולע, היא בת $\frac{360^\circ}{n}$, לכן, $\measuredangle AOD = 3\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{1080^\circ}{n}$

$\measuredangle AOD = 281.31^\circ - 146.31^\circ = 135^\circ$.

מקבלים: $\frac{1080^o}{n}=135^o \Rightarrow \mathbf{n=8}$

2) $AO=BO=\sqrt{13}, \measuredangle AOB=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ \Rightarrow$

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{13}\right)^2\cdot\sin 45^\circ=\frac{13\sqrt{2}}{4}$ $\Leftarrow$ שטח המצולע הוא $8\cdot\frac{13\sqrt{2}}{4}=\mathbf{26\sqrt{2}}$

ג. 1) פתרון המשוואה $z^8=a+bi$. נסמן: $a+bi=R\text{cis}\alpha$ ונקבל $z^8=R\text{cis}\alpha$

המספר $\sqrt{13}\cdot\text{cis}\left(281.31^o\right)$ הוא אחד מפתרונות המשוואה לכן מתקיים:

$$\left[\sqrt{13}\cdot\text{cis}\left(281.31^o\right)\right]^8=R\text{cis}\alpha \Rightarrow R\text{cis}\alpha=28561\text{cis}\left(90.48^o\right)$$

$$z^8=28561\text{cis}\left(90.48^o\right)=\mathbf{-239.269+28559.998\cdot i}$$

2) z_k הנו אחד מפתרונות המשוואה $z^8=28561\text{cis}\left(90.48^o+360^o k\right)$

$$\Rightarrow z_k=\sqrt[8]{28561}\text{cis}\left(\frac{90.48^o}{8}+45^o k\right)\Rightarrow z_k=\sqrt{13}\text{cis}\left(11.31^\circ+45^o k\right)$$

$$\Rightarrow z_{k+4}==\sqrt{13}\text{cis}\left[11.31^\circ+45^o(k+4)\right]=\sqrt{13}\text{cis}\left[\left(11.31^\circ+45^o k\right)+180^o\right]$$

מקבלים: אם נסמן ב- P את הנקודה המתאימה למספר z_k ונסמן ב- Q את הנקודה המתאימה למספר z_{k+4} נקבל $\measuredangle POQ=180^\circ$ ולכן הנקודות P ו- Q נמצאות על ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים.

3) נתון: $z_k=r\text{cis}\theta=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right) \Rightarrow z_{k+4}=r\text{cis}\left(\theta+180^\circ\right) \Rightarrow$

$$z_{k+4}=r\left[\cos\left(\theta+180^\circ\right)+i\sin\left(\theta+180^\circ\right)\right]=r\left(-\cos\theta-i\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{z_{k+4}=-r\text{cis}\theta}$$

פרק שני- גדילה ודעיכה, פונקציית חזקה , פונקציה מעריכית ולוגריתמית

4. בשני כפרים הרריים התגלתה מגפה הפוגעת בעדרי הכבשים אך לא גורמת למותם. ביום מסוים , היה מספר הכבשים החולים בעדר של כפר ב' גדול פי 9 ממספרם בכפר א'. התברר שבכפר א' גדל מספר הכבשים החולים פי a מדי שבוע ובכפר ב' מספרם גדל פי b מדי שבוע. כעבור 4 שבועות אחרי הספירה הראשונה היה מספר הכבשים החולים בכפר ב' גדול פי $1\frac{7}{9}$ ממספרם בכפר א'.

א. הראה כי $b=\frac{2}{3}a$.

ב. כעבור כמה שבועות מן הספירה הראשונה היה אותו מספר כבשים חולים בשני הכפרים ?

ג. הסתבר שמספר הכבשים החולים בכפר א' גדל פי 2 תוך 1.2 שבועות.
פי כמה גדל מספר הכבשים החולים מדי שבוע בכפר א' ? (עגל תוצאה לספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית).

ד. ביום בו החל המעקב אחר התפשטות המגפה היו k כבשים חולים בכפר א'.
הפונקציה $f(x)$ מתארת את מספר הכבשים החולים בכפר א' והפונקציה $g(x)$ מתארת את מספר הכבשים החולים בכפר ב' לפי הזמן x שנמדד מרגע המדידה הראשונה.
1) רשום באמצעות k את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
2) עדר הכבשים בכפר א' מונה 1785 כבשים ועדר הכבשים בכפר ב' מונה 690 כבשים. התברר שכעבור 10 שבועות , כל הכבשים בכפר א' היו חולים . תוך כמה זמן יחלו כל הכבשים בעדר של כפר ב' ?
3) סרטט , באותה מערכת צירים את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום $0\le x\le 15$

פתרון:

א. המגפה מתפשטת בקרב הכבשים בצורה מעריכית , לכן:

	M_t	t (שבועות)	q	M_0
כפר א'	$M_0\cdot a^4$	4	a	M_0
כפר ב'	$9M_0\cdot b^4$	4	b	$9M_0$

מתקבלת המשוואה: $1\frac{7}{9}\cdot M_0\cdot a^4=9M_0\cdot b^4 \Leftarrow \frac{16}{9}a^4=9\cdot b^4 \Leftarrow \left(\frac{b}{a}\right)^4=\frac{16}{81} \Leftarrow \frac{b}{a}=\frac{2}{3}$

מקבלים: $\mathbf{b=\frac{2}{3}a}$.

א. $M_0\cdot a^t=9M_0\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)^t \Rightarrow a^t=9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^t\cdot a^t \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{1}{9} \Rightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}=\mathbf{5.4}$ **שבועות**

ב. $M_0\cdot a^{1.2}=2M_0 \Rightarrow a^{1.2}=2 \Rightarrow a=\sqrt[1.2]{2} \Rightarrow a=\mathbf{1.8}$

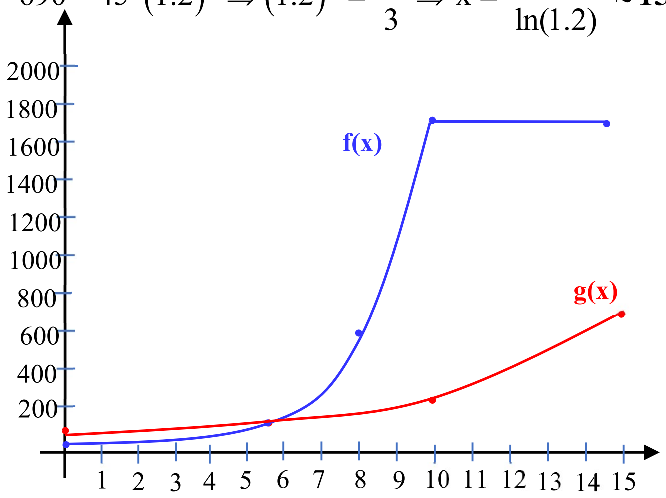
ג. 1) מקבלים: $a=1.8 \Rightarrow b=\frac{2}{3}\cdot 1.8=1.2$.

$$\mathbf{f(x)=k\cdot(1.8)^x\,,\ g(x)=9k\cdot(1.2)^x}$$

2) $1785=k\cdot(1.8)^{10}\Rightarrow 1785=357k\Rightarrow k=5\Rightarrow 9k=45\Rightarrow$

$$690=45\cdot(1.2)^x\Rightarrow(1.2)^x=\frac{46}{3}\Rightarrow x=\frac{\ln\left(\frac{46}{3}\right)}{\ln(1.2)}\approx\mathbf{15}$$

3)



5. הפונקציה $f(x)$ משיקה לציר ה- x . נתונה הנגזרת של הפונקציה: $f'(x) = \dfrac{2x - 10}{x^2 - 10x + 26}$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה ומצא:

1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

3) את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתון: $g(x) = f(x+5)$.

1) הראה שהפונקציה $g(x)$ זוגית.

2) האם הפונקציה $f(x)$ סימטרית ביחס לישר $x = 5$? נמק.

3) השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישר $x = 10$ הוא S .

הבע בעזרת S את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x , הישר $x = 5$ והישר $x = -5$.

ה. 1) נתונה פונקציה נוספת : $h(x) = \ln(5.2x^2 + 5.2)$. הפונקציה $h(x)$ מקיימת:

$h(x) = g(x) + c$. מצא את c .

2) נגדיר פונקציה נוספת: $k(x) = e^{h(x) - g(x)}$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $k(x)$, ציר x , הישר $x = 6$ והישר $x = 10$.

<u>פתרון:</u>

א. $f(x) = \int \dfrac{2x - 10}{x^2 - 10x + 26}dx = \ln\left|x^2 - 10x + 26\right| + c$. $x^2 - 10x + 26 > 0$ לכל ערך של x ,

לכן $f(x) = \ln(x^2 - 10x + 26) + c$. גרף הפונקציה משיק לציר ה- x , לכן , בנקודה שבה $f'(x) = 0$ ערך הפונקציה הוא 0 . מקבלים:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x - 10}{x^2 - 10x + 26} = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow f(5) = 0$$

לכן $0 = \ln(1) + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \mathbf{f(x) = \ln(x^2 - 10x + 26)}$

ב. 1) $x^2 - 10x + 26 > 0$ לכל ערך של x , לכן, הפונקציה $f(x)$ מוגדרת **לכל ערך של x** .

2) $f(0) = \ln(26) \Rightarrow \mathbf{(0;\ln 26)}$, $0 = \ln(x^2 - 10x + 26) \Leftarrow 1 = x^2 - 10x + 26 \Leftarrow$

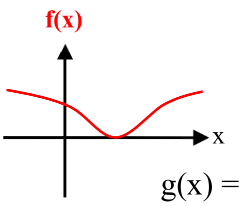
$x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \mathbf{(5;0)}$

3) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow (5;0)$

x	x <	5	< x
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	min	↗

מקבלים : **(5;0) נקודת מינימום**

ג.



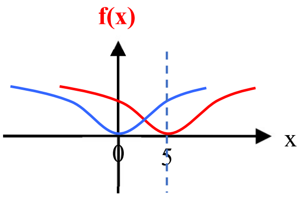
ד. 1) $g(x) = f(x+5) = \ln\left[(x+5)^2 - 10(x+5) + 26\right] \Rightarrow g(x) = \ln(x^2 + 1)$

הפונקציה זוגית $\Leftarrow g(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = g(x)$

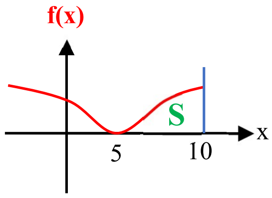
2) $g(x)$ זוגית ולכן היא סימטרית ביחס לציר ה- y .

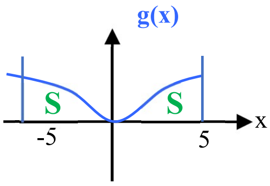
הפונקציה $g(x)$ היא הזזה אופקית של הפונקציה $f(x)$

5 יחידות שמאלה , לכן , גרף הפונקציה $f(x)$ סימטרי



ביחס לישר $x = 5$.





3) השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישר $x = 10$ שווה לשטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x והישר $x = 5$ (הזזת השטח 5 יחידות שמאלה). הפונקציה $g(x)$ זוגית, לכן, השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = 5$ שווה לשטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x והישר $x = -5$. לכן, השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x, הישר $x = 5$ והישר $x = -5$ הוא **2S**.

ה. 1) $h(x) = \ln(5.2x^2 + 5.2) = \ln\left[5.2(x^2 + 1)\right] = \ln 5.2 + \ln(x^2 + 1) \Rightarrow$

$h(x) = g(x) + \ln(5.2) \Rightarrow \mathbf{c = \ln(5.2)}$

2) $k(x) = e^{h(x) - g(x)} = e^{g(x) + \ln(5.2) - g(x)} = e^{\ln(5.2)} = 5.2$.

מתקבל שטח של מלבן: $S = 4 \cdot 5.2 = \mathbf{20.8}$