מתכונת שאלון 581

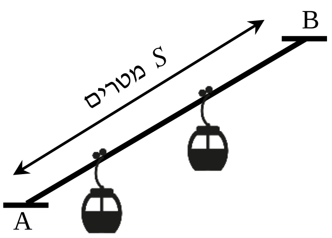
ענה על חמש מן השאלות 1-8, לפחות שאלה אחת מכל פרק.   שם: __________

ערך כל שאלה הוא 20 נקודות.   כיתה: _________

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) שתי קרוניות רכבל - מהירה ואיטית - נעות על פני מסלול משופע שאורכו S מטרים.
המסלול נמתח בין התחנה A הנמצאת בתחתית המסלול לבין התחנה B הנמצאת בראשו (ראה סרטוט):



מהירותה האוטומטית של הקרונית המהירה גדולה פי 2 ממהירותה האוטומטית של הקרונית האיטית, אך מהירות התנועה של כל אחת מהן בעלייה ובירידה על פני המסלול קטנה וגדלה (בהתאמה) ממהירותן האוטומטית ב- p מטרים לשנייה.

הקרונית המהירה מתחילה לעלות מ-A לכיוון B, ומיד עם הגעתה לאמצע המסלול מתחילה הקרונית האיטית לרדת מ-B.

הקרוניות חולפות זו על פני זו כאשר הקרונית האיטית משלימה רבע מדרכה מטה.

א. הבע באמצעות p את:

(1) מהירות העלייה של הקרונית המהירה.

(2) מהירות הירידה של הקרונית האיטית.

מיד עם הגעתה של הקרונית המהירה ל-B, היא מסתובבת ויורדת לכיוון A.

ב. האם הקרונית המהירה משיגה את הקרונית האיטית טרם הגעתה ל-A? נמק תשובתך.

מתקיים: $p < \frac{S}{60}$.

ג. כמה שניות עברו מהזמן בו הקרוניות חלפו זו על פני זו עד שהמרחק ביניהן היה שווה **לראשונה** ל- $30p$?

כעת נתון: לאחר שהקרוניות חלפו זו על פני זו, עברו 20 שניות בין פעם אחת שבה המרחק ביניהן היה שווה ל- $30p$ לבין הפעם הבאה שהיה זה שוב המרחק ביניהן.

ד. הבע את S באמצעות p.

כעת נתון: בין שתי הפעמים הנ"ל עברה הקרונית המהירה מרחק של 90 מטרים.

ה. מצא את המהירות האוטומטית של כל אחת משתי הקרוניות.

2) a_n היא סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, שאיברה הראשון a_1 ומנתה q.
סכום סדרה זו שווה ל- S ומתקיים: $S<0$.
ידוע כי בסדרה זו קיימים שני איברים סמוכים שמכפלתם שווה ל- a_1.

א. הוכח:

(1) $a_1<0$

(2) $a_2>0$

b_n היא סדרה הנדסית אינסופית נוספת, שאיברה הראשון b_1 ומנתה q^3.
סכום סדרה זו שווה ל- T ומתקיים: $T<0$. כמו כן מתקיים: $(b_1)^2=9\cdot a_3\cdot a_5$.

ב. הבע את b_1 באמצעות a_1 ו- q.

כעת נתון: $T+S\cdot q=0$.

ג. מצא את q.

ד. הבע את S ו- T באמצעות a_1.

כעת נתון: $q=\sqrt[3]{\frac{1}{S+T}}$.

ה. מצא את a_1.

3) גיל ושלומי לומדים בבית-הספר "עניין של זמן".
גיל תמיד מאחר ללימודים אם הוא לא ישן מוקדם.
אם הוא ישן מוקדם, ההסתברות שיאחר ללימודים קטנה מההסתברות שלא יאחר.
נתון כי מתוך ארבע פעמים בהם גיל ישן מוקדם, ההסתברות שלו לאחר ללימודים בדיוק פעמיים שווה ל- $\frac{25}{216}$.

א. מה ההסתברות שגיל מאחר ללימודים אם הוא ישן מוקדם?

כעת נתון: ההסתברות שגיל ישן מוקדם אם הוא איחר ללימודים שווה ל-0.2.

ב. מה ההסתברות שגיל מאחר ללימודים בבית-הספר?

שלומי ישן מוקדם מדי יום בהסתברות 0.4, אבל אין תלות בין זמן הגעתו ללימודים לבין שעות השינה שלו, ואין תלות בין שעות השינה שלו ביום מסוים לבין שעות השינה שלו ביום אחר.
ידוע כי ההסתברות של שלומי לישון מוקדם ולאחר ללימודים במשך שלושה ימים רצופים שווה ל-0.001.

ג. מה ההסתברות ששלומי מאחר ללימודים בבית-הספר?

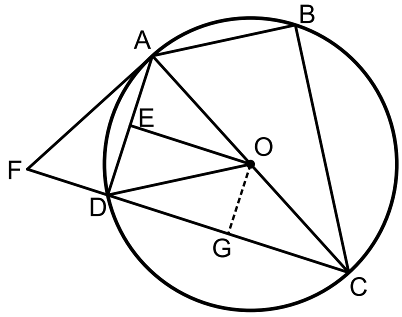
ההסתברות שגם גיל וגם שלומי לא יאחרו ללימודים באותו היום שווה ל-0.375.

ד. הסבר מדוע המאורע "גיל מאחר ללימודים" והמאורע "שלומי מאחר ללימודים" הם בלתי תלויים.

ה. מה ההסתברות שבדיוק אחד מבין התלמידים גיל ושלומי יאחר ללימודים באותו היום?

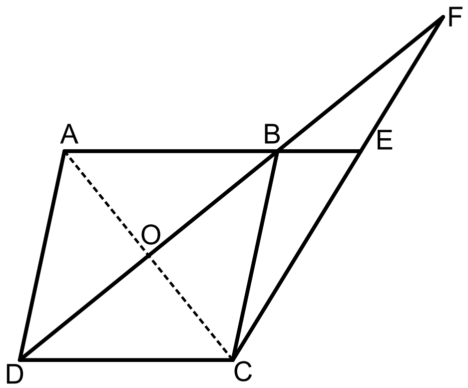
פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) מרובע ABCD חסום במעגל, כך שהאלכסון AC עובר דרך מרכז המעגל הנמצא בנקודה O.
הנקודה E נמצאת על AD, כך ש- $AB = 2AE$.
נתון: $\sphericalangle COD = 2\sphericalangle BAC$.



א. הוכח כי המרובע ABCD הוא דלתון.
ב. הוכח:
(1) $AD = 2DE$
(2) $CD = 2EO$
ג. חשב את היחס בין שטח המשולש COD לבין שטח הדלתון ABCD.
הנקודה F נמצאת על המשך CD כך ש- $\sphericalangle AFC = \sphericalangle CAD$.
ד. הוכח:
(1) AF משיק למעגל.
(2) $\Delta DAF \sim \Delta ACF$.
(3) $CF^2 - AC^2 = CF \cdot DF$.
כעת נתון: הנקודה G נמצאת על CD כך ש- $OG \parallel AD$, ‏AF = 7.5 ס"מ, GF = 8.5 ס"מ.
ה. חשב את אורך הקטע DG.

5) נתון מעוין ABCD ‏($AB \parallel CD$) שאלכסוניו נחתכים בנקודה O.
הנקודה F נמצאת על המשך האלכסון BD.
המשכה של צלע המעוין AB והקטע CF נחתכים בנקודה E.
כמו כן נתון:
- אורך האלכסון BD הוא 4 ס"מ.
- גודל הזווית החדה של המעוין הוא 2α.
- R הוא רדיוס המעגל החוסם את משולש BOC.



א. הבע באמצעות R את:
(1) $\cos\alpha$.
(2) $\sin\alpha$.
(3) אורך האלכסון AC.
כעת נתון: $CE : EF = 2\cos\alpha$.
ב. הוכח: המשולש BCF הוא שווה-שוקיים.
ג. הבע באמצעות R את אורך הקטע CF.
כעת נתון: שטח המעוין שווה ל- $4R$.
ד. חשב את α.
ה. מצא את אורכו של רדיוס המעגל החוסם את משולש BCE.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=-ax^3+16a^2x^2-48a^3x$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את:

(1) שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

(2) תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הבע באמצעות a את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של פונקציית <u>הנגזרת</u> של $f(x)$ וקבע את סוגה.

נתון הישר: $y=16a^3x$.

ד. (1) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x של נקודות המפגש של הישר עם הפונקציה $f(x)$.

(2) הבע באמצעות a את ערכי נגזרת הפונקציה $f(x)$ בנקודות המפגש שמצאת בסעיף ד(1).

(3) מהו היחס ההדדי בין הישר והפונקציה $f(x)$ בנקודות המפגש בסעיף ד(1)? נמק תשובתך.

השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)$ והישר הנתון שווה ל- $\frac{32}{3}$.

ה. מצא את a.

ו. חשב את השיפוע המקסימלי של ישר המשיק לגרף הפונקציה (מבין כל הישרים המשיקים לה).

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת: $f(x)=f(x+\pi)$ לכל x.
נתון:
- גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך הנקודות $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ ו- $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.
- הישר $y=2$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

כמו כן נתון כי בתחום $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ מתקיים:
- למשוואה: $f'(x)=0$ יש פתרון יחיד השווה ל- $\frac{\pi}{4}$.
- סכום פתרונות המשוואה: $f(x)=1$ שווה ל- $\frac{\pi}{2}$.

א. סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$.

הפונקציה $g(x)$ מוגדרת כך: $g(x)=1-f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

ידוע, כי הישר $y=1$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ עבור $x=\frac{3\pi}{2}$, וכי ערך הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ עבור $x=\frac{\pi}{2}$ הוא 2-.

ב. (1) הסבר מדוע גם $g(x)$ מקיימת: $g(x)=g(x+\pi)$ לכל x.
(2) מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0\le x\le\pi$.
(3) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$.
(4) מצא את **כל** נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0\le x\le\pi$.
(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $0\le x\le\pi$.

ג. הסבר מדוע מתקיים: $0\le g^2(x)\le 1$.

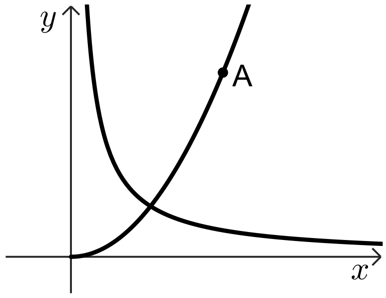
נסמן ב- S את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $g(x)$ והצירים ברביע הרביעי.

ד. הבע באמצעות S את ערך האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

כעת נתון: $f(x)=\sin 2x+1$
ה. הוכח: $g(x)$ זוגית.

8) בגרף שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x}$ ברביע הראשון.

A היא נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון, ששיעור ה-x שלה שווה ל-t.



א. הבע באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A.

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון, כך שהישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B מאונך למשיק, שאת משוואתו הבעת בסעיף א.

ב. הבע באמצעות t את:
(1) שיעורי הנקודה B.
(2) משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

ג. מצא את t עבורו שני המשיקים שאת משוואותיהם הבעת בסעיף א ובסעיף ב(2) נפגשים על ציר ה-x.

כעת נתון: $4 \le t \le 18$.
המשיק שאת משוואתו הבעת בסעיף א חותך את ציר ה-x בנקודה C,
והמשיק שאת משוואתו הבעת בסעיף ב(2) חותך את ציר ה-x בנקודה D.

ד. האם שיעור ה-x של הנקודה C גדול או קטן משיעור ה-x של הנקודה D? נמק תשובתך.

ה. (1) מצא ביטוי לאורך הקטע CD באמצעות t.
(2) מצא את שיעורי הנקודה A עבורה אורך הקטע CD הוא מקסימלי.
(3) מצא את אורך הקטע CD המינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. (1) מהירות העלייה של הקרונית המהירה - $3p$.

א. (2) מהירות הירידה של הקרונית המהירה - $3p$. ב. לא.

ג. 5 שניות. ד. $S = 120p$

ה. המהירות האוטומטית של הקרונית המהירה = 4 מטרים לשנייה,
והמהירות האוטומטית של הקרונית האיטית = 2 מטרים לשנייה.

2) א. (1) הוכחה. א. (2) הוכחה. ב. $b_1 = -3a_1q^3$

ג. $q = -0.5$ ד. $S = \frac{2a_1}{3}$, $T = \frac{a_1}{3}$ ה. $a_1 = -8$.

3) א. $p = \frac{1}{6}$ ב. $p = 0.5$ ג. $p = 0.25$

ד. $(1-0.5)\cdot(1-0.25) = 0.375$ ה. $p = 0.5$.

4) א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. ב. (2) הוכחה.

ג. 0.25. ד. (1) הוכחה. ד. (2) הוכחה.

ד. (3) הוכחה. ה. 4 סי"מ.

5) א. (1) $\cos\alpha = \frac{1}{R}$ א. (2) $\sin\alpha = \frac{1}{R}\sqrt{R^2-1}$ א. (3) $\mathrm{AC} = 4\sqrt{R^2-1}$

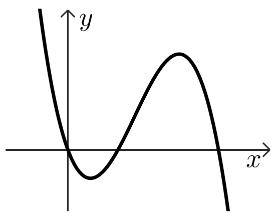
ב. הוכחה. ג. $\mathrm{CF} = \sqrt{8R^2+8R} = 2\sqrt{2R(R+1)}$

ד. $\alpha = 30^\circ$ ה. 1.633 סי"מ $\approx \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = r$.

6) א. (1) $(0,0)$, $(4a,0)$, $(12a,0)$

א. (2) חיובית: $4a < x < 12a$, $x < 0$, שלילית: $x > 12a$, $0 < x < 4a$.

ב. להלן סרטוט: ג. $x = \frac{16}{3}a$, max.



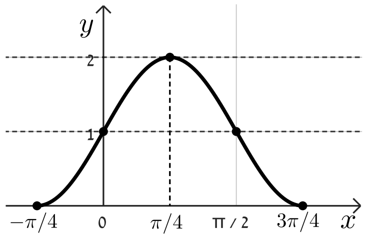
ד. (1) $x = 0$, $x = 8a$

ד. (2) $x = 0:\ -48a^3$, $x = 8a:\ 16a^3$

ד. (3) $x = 0$: חותך, $x = 8a$: משיק.

ה. $a = 0.5$ ו. $m_{\max} = \frac{14}{3}$.

7) א. להלן סקיצה:

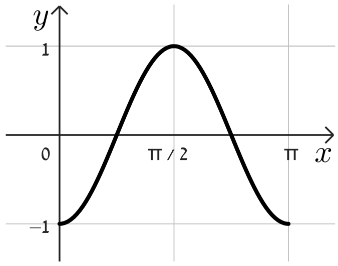


ב. (1) g כהזזה אופקית ואנכית עם שיקוף של f שומרת על המחזור.

ב. (2) $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, $(0,-1)$ ב. (3) $m=2$

ב. (4) $\min(\pi,-1)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $\min(0,-1)$

ב. (5) להלן סקיצה:



ג. הסבר המבוסס על מחזוריות, ערך מקסימלי וערכי מינימום-קצה.

ד. $\frac{\pi}{4}-S$.

ה. מתקבל: $g(x)=-\cos 2x$ ומדובר בפונקציה זוגית.

8) א. $y=2tx-t^2$ ב. (1) $B\left(\sqrt{2t},\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)$ ב. (2) $y=-\frac{1}{2t}x+\frac{\sqrt{2t}}{t}$.

ג. 32.   ד. $x_C<x_D$ (כי בתחום הנתון $t<32$)

ה. (1) $l=2\sqrt{2t}-\frac{t}{2}$ ה. (2) $A(8,64)$ ה. (3) $CD_{min}=3$.