

מתכונת מספר 5 – שאלון 581

הוראות לנבחן – מותאם למיקוד קיץ 2020

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים. יש לענות על 5 שאלות מכל פרקי השאלון.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות.
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומתכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה

מתכונת מספר 5 – שאלון 581

נכתב על ידי יואב ירון ושירי דוברין

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

- (1) משאית, מכונית ואופנוע יצאו בזה אחר זה מאשקלון לקיבוץ דגניה דרך תל אביב. המשאית יצאה ראשונה, לאחר a דקות יצאה המכונית ולאחר a דקות נוספות יצא האופנוע. כלי הרכב הגיעו לתל אביב באותו הזמן, ומיד המשיכו לדגניה, הנמצאת במרחק של 120 ק"מ מתל אביב. המשאית הגיעה לדגניה שעה לאחר הגעת המכונית. האופנוע הגיע לדגניה, מיד הסתובב וחזר באותה הדרך בה הגיע, ופגש את המשאית בדרכה לדגניה, במרחק 40 ק"מ מדגניה. מהירויות כלי הרכב לא השתנו במהלך הנסיעה.
- א. מצא באיזו מהירות נסע כל אחד מכלי הרכב.
- ב. באיזה מרחק מדגניה פגש האופנוע את המכונית, בדרכו חזרה מדגניה?
- ג. כמה דקות אחרי פגישת האופנוע והמכונית, כמתואר בסעיף ב' פגש האופנוע את המשאית?

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{10}{7} \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{5 - 2a_n} \end{cases} \quad \text{סדרה מוגדרת לכל } n \text{ טבעי על ידי הכלל:}$$

$$\text{נגדיר סדרה חדשה: } b_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2}$$

- א. הוכח כי הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
- ב. נסמן: $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$. בטא את T כפונקציה של n .
- ג. נתון כי עבור k טבעי כלשהו מתקיים $a_k = \frac{2}{6251}$.
- מצא את סכום k האיברים הראשונים בסדרת ה- b_n .
- ד. חשב את הסכום: $\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} - \frac{1}{b_4} \dots$

3) מנתונים שנאספו מרשת סופרמרקטים מתברר כי ההסתברות שלקוח ישלם תמורת

הקנייה בכרטיס אשראי גדולה פי $\frac{21}{4}$ מההסתברות שישלם במזומן.

$\frac{3}{5}$ מהלקוחות המשלמים באשראי קונים בסכום העולה על 1000 ש"ח.

ידוע כי ההסתברות שלקוח יבצע קניה בסכום העולה על 1000 ש"ח היא 0.536.

א. בוחרים באקראי לקוח ששילם במזומן.

מה ההסתברות שקנייתו הסתכמה בסכום העולה על 1000 ש"ח?

ב. בוחרים באקראי 6 קונים, אחד מהם שילם במזומן והאחרים באשראי.

(1) מה ההסתברות שבדיוק 4 מבין הלקוחות ששילמו באשראי, שילמו יותר מ-1000 ש"ח?

(2) מה ההסתברות שרק הלקוח ששילם במזומן, שילם סכום שאינו עולה על 1000 ש"ח?

ג. ידוע שרק אחד מהלקוחות מתוך השישה של סעיף ב' שילם סכום שאינו עולה על 1000 ש"ח.

מה ההסתברות שהיה זה הלקוח ששילם במזומן?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) נתון: המרובע ABCD הוא טרפז שאלכסונו נחתכים בנקודה O.

נסמן: $S_{\Delta BOC} = S_1$, $S_{\Delta AOD} = S_2$.

העבירו דרך נקודה O את h_1 ו- h_2 שהם גבהי

המשולשים BOC ו-AOD בהתאמה כמתואר בציור.

א. הוכח כי: $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$

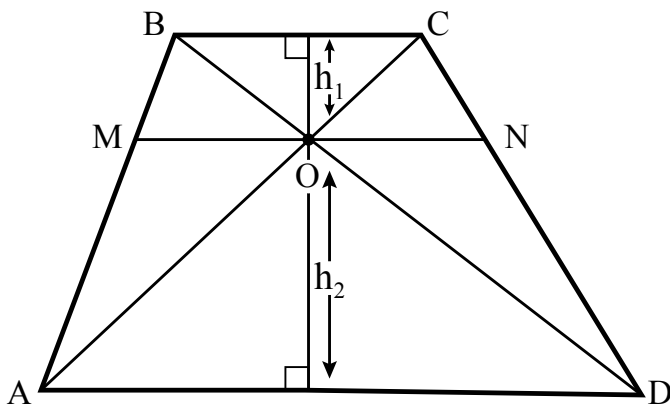
ב. הבע באמצעות S_1 ו- S_2 את שטח הטרפז ABCD.

ג. דרך נקודה O עובר מקביל לבסיסי הטרפז,

מקביל זה חותך את AB בנקודה M ואת CD בנקודה N.

(1) הראה כי $MO = ON$.

(2) הראה כי $MN = \frac{2BC \cdot AD}{BC + AD}$.



5) אחת הזוויות של משולש היא בת 120° והצלעות הכולאות זווית זו הן a ו- b .

הגובה לצלע השלישית הוא h .

א. הוכח: אם $h = \frac{ab}{a+b}$ אז המשולש הוא שווה שוקיים.

ב. בתנאים של סעיף א':

(1) בטא את שטח המשולש באמצעות h בלבד.

(2) מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום במשולש לבין רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

פרק שלוש – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

א. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

(1) תחום הגדרה.

(2) נקודות קיצון וסוגן.

(3) תחומי עליה וירידה.

(4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה משוואה: $x^3 - K \cdot x + 2K = 0$.

לאילו ערכי K יש למשוואה:

(1) פתרון יחיד.

(2) פתרונות.

(3) פתרונות.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x-2)$ סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. נמק

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{2x-m}}{2x+m}$, $m > 0$

ענה על הסעיפים הבאים והבע תשובותיך בעזרת m לפי הצורך:

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.

(3) מצא את נקודת הקיצון ורשום תחומי עלייה וירידה.

(4) מצא את אסימפטוטות לגרף הפונקציה.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. קבע בעזרת נימוקים מתאימים אם הטענות הבאות נכונות או לא:

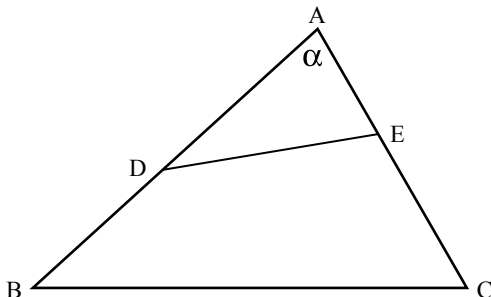
(I) לפונקציה: $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ יש אסימפטוטה אנכית.

(II) לישר: $y = \frac{\sqrt{m}}{4m}$ יש שתי נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$.

(III) לפונקציה $g(x) = -f(x)$ יש תחומי עלייה זהים לאלו של $f(x)$.

(IV) עבור $m > 0$ מתקיים $0 \leq \frac{\sqrt{2x-m}}{2x+m} \leq \frac{\sqrt{2m}}{4m}$.

ג. בטא בעזרת m את השטח המוגבל על ידי $f'(x)$ וציר ה- x בתחום $m \leq x \leq 1.5m$.



(8) במשולש ABC נתון: $\angle BAC = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$.

נקודות D ו-E נמצאות על AB ו-AC בהתאמה כך ששטח

המרובע BCED הוא $\frac{3}{4}$ משטח המשולש ABC.

א. הוכח כי האורך המינימלי של ED הוא: $\sqrt{bc} \sin \frac{\alpha}{2}$.

ב. נתון כעת בנוסף כי המרובע BCED הוא בר חסימה במעגל.

הוכח כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

תשובות למתכונת מספר 5 – שאלון 581

1 א. מהירות המשאית - 30 קמ"ש, מהירות המכונית - 40 קמ"ש, מהירות האופנוע - 60 קמ"ש. ב. 24 ק"מ.

ג. 16 דקות.

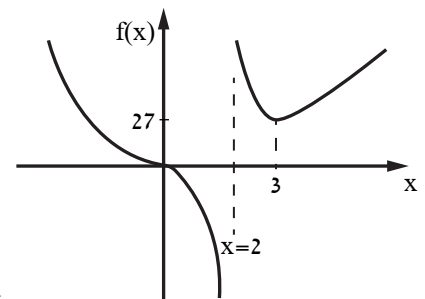
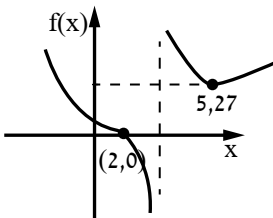
2 א. $q=5$ ב. $T = \frac{5^n - 1}{20} + \frac{1}{2}n$ ג. $S_7 = 3906\frac{1}{5}$ ד. $S_\infty = \frac{25}{6}$

3 א. $P=0.2$ ב. $P=0.2592$ (1) $P=0.0622$ (2) ג. $P=0.545$

4 ב. $S_{ABCD} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

5 ב. $S_\Delta = \sqrt{3}h^2$ ג. 0.232

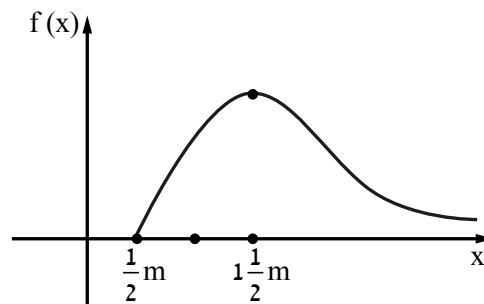
6 א. (1) $x \neq 2$ (2) (3,27) מינימום. (3) עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 \neq x < 3$ (4) $x = 2$



ג. ב. (1) $K < 27$ (2) $K = 27$ (3) $K > 27$

(5)

7 א. (1) $x \geq \frac{m}{2}$ (2) $(\frac{m}{2}, 0)$ (3) $(1.5m, \frac{\sqrt{2m}}{4m})$ מקסימום, $(\frac{m}{2}, 0)$ מינימום קצה, עלייה: $\frac{1}{2}m < x < 1\frac{1}{2}m$



ב. (I) טענה נכונה. (II) טענה

ירידה: $x > 1\frac{1}{2}m$ (4) $y=0$ (5)

נכונה. (III) טענה לא נכונה. (IV) טענה נכונה. (2) $S = \frac{0.02\sqrt{m}}{m}$