

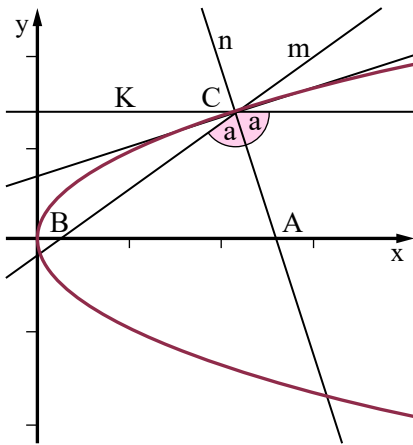
מתכונת מספר 3 – שאלון 582

נכתב על ידי דוד צחור

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענו על שתיים מהשאלות 1 – 3

(1) נתונה פרבולה $y^2 = 2px$. בנקודה $C(x_c, y_c)$ שעל הפרבולה,



מעבירים ישר n המאונך למשיק לפרבולה בנקודה זו.

הישר n חותך את ציר ה- x בנקודה A .

א. הביעו את שיעורי הנקודה A בעזרת p ו- x_c .

ב. ישר k עובר בנקודה C ומקביל לציר ה- x .

הישרים k ו- m יוצרים זוויות שוות עם הישר n . (ראו סרטוט).

הישר m חותך את ציר ה- x בנקודה B .

(1) הוכיחו כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

(2) הוכיחו כי הנקודה B היא מוקד הפרבולה.

(2) $SABC$ היא פירמידה ישרה שאורכי ישרה כל מקצועותיה שווים ל-1.

נסמן: $\underline{u} = \overrightarrow{SA}$, $\underline{v} = \overrightarrow{SB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{SC}$

הנקודה M נמצאת על מישור המשולש ABC

ומקיימת: $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$

מהנקודה M מורידים אנך למישור הפאה SAC .

אנך זה חותך את הפאה בנקודה D .

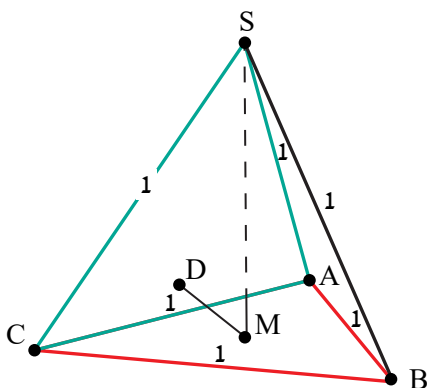
א. הוכיחו כי הווקטור \overrightarrow{SM} ניצב למישור המשולש ABC .

ב. הביעו את הווקטור \overrightarrow{MD} בעזרת \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

(הערה: שימו לב, ניתן לפתור את סעיפים ג' – ד' בעזרת טריגונומטריה במרחב).

ג. חשבו את מרחק הנקודה M מהמישור SAC .

ד. חשבו את הזווית בין SM והמישור SAC .



- (3) נתונה המשוואה: $z^2 - i \cdot 2 \sin \alpha \cdot z - 1 = 0$. α ממשי ומקיים $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
- א. הביעו בעזרת α את ההצגה הקוטבית של פתרונות המשוואה וסמנו במישור של גאוס את הנקודות המתאימות לפתרונות אלו.
- ב. הפתרון הנמצא ברביע הראשון הוא איבר ראשון של סדרה הנדסית a_1, a_2, a_3, \dots . הפתרון השני הוא האיבר השני בסדרה זו. נתון כי $\alpha = 60^\circ$.
- (1) הוכיחו כי האיברים a_{3n} הם ממשיים לכל n טבעי.
- (2) חשבו את המכפלה: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{24}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ענו על אחת מהשאלות 4 – 5

- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
- א. (1) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ עולה בכל תחומה.
- (2) מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.
- (3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלו).
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln[f(x)]$. ענו על תתי הסעיפים הבאים (חובה לנמק כל תשובה):
- (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
- (2) מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$? (אם יש כאלה)
- (3) מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$? (אם יש כאלה)
- (4) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?
- (5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה g .
- ג. הוכיחו בעזרת הסעיפים הקודמים, או בדרך אחרת, כי:
- $$\ln(e^x + 1) + \ln(e^x - 1) - \ln(e^{2x} + 1) < 0 \quad \text{לכל } x > 0$$

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a \ln x}{\sqrt{x}}$, $a > 0$

א. מצאו את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלו).

(3) תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. השטח החסום על ידי גרף הפונקציה, ציר ה- x , והישר שעובר בנקודת הקיצון

של הפונקציה ומאונך לציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

נפח גוף הסיבוב שמתקבל הוא $\frac{32\pi}{3}$. מצאו את a .

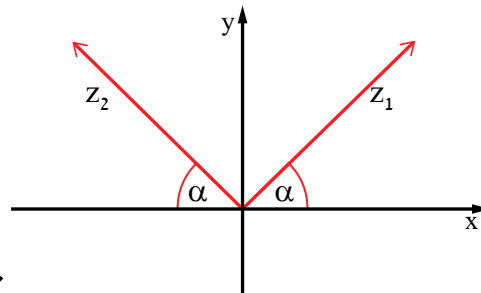
ד. מצאו את הסימן של האינטגרל המסוים $\int_t^s f'(x)dx$, $(t < s)$,

אם נתון ש- t ו- s נמצאים בין $\frac{1}{7}$ ל-7.

תשובות למתכונת מספר 3 – שאלון 582

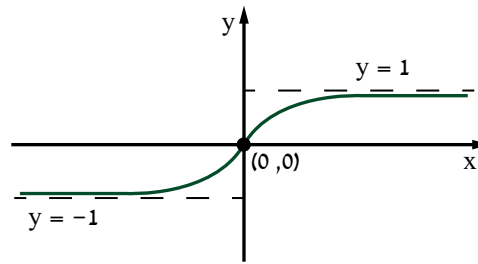
1 א. $A(x_c + p, 0)$

2 ב. $\frac{1}{9}u + \frac{1}{9}w - \frac{1}{3}v$ ג. $\frac{\sqrt{6}}{9}$ ד. 19.47°



ב. (2) 1.

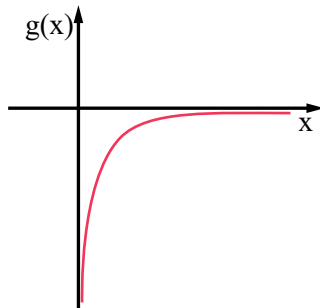
3 א. $\cos \alpha + \sin \alpha i$, $-\cos \alpha + \sin \alpha i$



ב. (1) $x > 0$.

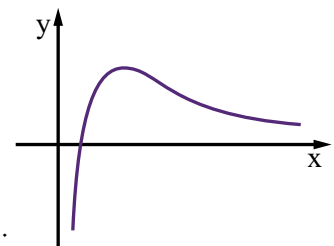
4 א. (2) $y = 1$, $y = -1$ (3) $(0, 0)$ (4)

(2) שלילית: $x > 0$ (3) עולה: $x > 0$



(4) אסימפטוטה אופקית: $y = 0$, אסימפטוטה אנכית: $x = 0$ (5)

5 א. (1) $x > 0$ (2) $(1, 0)$ (3) תחום העלייה: $0 < x < e^2$, תחום הירידה: $x > e^2$



ג. 2. ד. חיובי.

ב.