

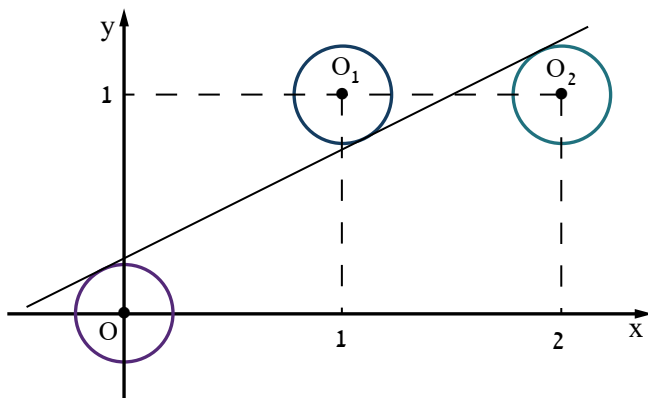
מתכונת מספר 2 – שאלון 582

נכתב על ידי סרור אסעד

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענו על שתיים מהשאלות 1 – 3

1) נתונים שלושה מעגלים זהים.



מרכזי המעגלים נמצאים בראשית הצירים O

ובנקודות O_1 ו- O_2 ברביע הראשון.

לשלושת המעגלים קיים משיק משותף,

כמתואר בסרטוט.

נתון: $O_1(1,1)$, $O_2(2,1)$.

א. מצאו את משוואת המשיק המשותף.

ב. המשיק שמצאת בסעיף א'.

משיק גם לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה A.

(1) מצאו שיעורי הנקודה A ומשוואת הפרבולה.

(2) הראו שהפרבולה עוברת בנקודה O_2 .

ג. מצאו משוואת ישר המקביל למשיק שמצאתם בסעיף א' ובמרחק $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ ממנו,

אם ידוע שהוא נמצא מעל המשיק הנ"ל. הראו שהישר עובר דרך הנקודה O_1 .

ד. שטח המקבילית ששתיים מצלעותיה הן המשיק מסעיף א'

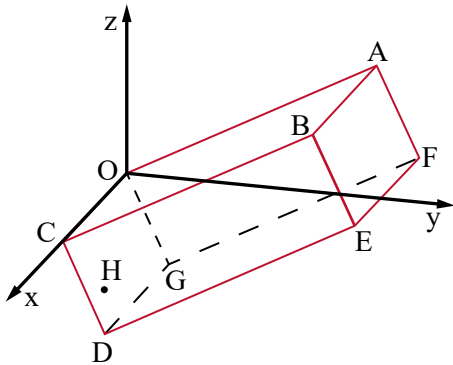
והישר מסעיף ג' ושניים מקודקודיה הם הנקודות A ו-O שווה ל- $\frac{1}{4}$.

מצאו את משוואת הצלע הרביעית של המקבילית, המקבילה לצלע AO_1 ,

אם ידוע שהיא חותכת ציר ה-y בחלקו החיובי.

2) GFED היא תיבה, שמקצועה OC נמצא על ציר ה-x (ראו ציור).

הנקודות $A(0, 6, 3)$, $D(3, 1, -2)$ ו- $G(0, 1, -2)$ הן שלושה מקודקודיה של התיבה הנתונה.



א. מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה F

והמקביל למישור ADG.

ב. מצאו הצגה פרמטרית לישר המאונך למישור ADG

והעובר דרך הנקודה O.

ג. נתונה הנקודה $H(3, 1, -1)$. הנקודה P נמצאת

על הישר המחבר בין הנקודות D ו-H.

מצאו את שיעורי הנקודה P עבורו מתקיים $\cos(\angle POA) = \frac{3}{\sqrt{45}}$.

ד. מנקודה P מורידים אנך למישור שמצאת בסעיף א'.

האנך חותך את המישור בנקודה M. מצאו את שיעורי הנקודה M.

ה. נתון מעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. הישר $l: \underline{x} = (0, 2, -4) + t(1, 0, 0)$ נמצא במישור המעגל.

(1) הוכיחו שהישר l משיק למעגל.

(2) מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

3) z הוא מספר מרוכב המקיים: $z = \cos \theta + i \sin \theta$

א. הוכיחו:

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta \quad (2)$$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta \quad (1)$$

ב. (1) נתון: $|z| = 1$.

$$\frac{\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) \cdot i}{z^2 + \frac{1}{z^2}} = -\sqrt{3} \quad \text{היעזרו בסעיף א' ופתרו את המשוואה:}$$

(2) סמנו במישור גאוס את הנקודות המתאימות לפתרונות אלו.

ג. נסמן את ארבעת הפתרונות שמצאתם בסעיף הקודם ב- z_1, z_2, z_3 ו- z_4 .

כאשר z_k הוא הפתרון המתאים לנקודה ברביע ה- k , $k = 1, 2, 3, 4$.

(1) הוכיחו כי: $z_2^{3n} + z_2^{3m+1} + z_2^{3p+2} = 0$ (n, m, p הם מספרים טבעיים).

(2) מצאו את ה- n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים: $(\text{cis} 51^\circ)^n = z_4$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ענו על שאלה אחת מבין השאלות 4 – 5

(4) נתון כי הפונקציות $g(x)$ ו- $f(x)$, המוגדרות לכל x , מקיימות: $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

א. (1) נתון: $\int_0^1 g'(x) dx = 1 - e$, $g(1) = 1$, $f(1) = 0$.

מצאו את הערך המספרי של $g(0)$.

(2) נתון גם: $f(x) = x^2 + ax + b$, a ו- b פרמטרים.

מצאו את a ו- b .

ב. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x) = k \cdot g(x)$, $k > 0$.

בציור שלפניך מתוארים הגרפים של פונקציות הנגזרת

הראשונה $h'(x)$ והנגזרת השנייה $h''(x)$ של הפונקציה $h(x)$.

(1) היעזרו במידת הצורך בפרמטר k ומצאו את שיעורי

נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

(2) קבעו איזה מן הגרפים I או II הוא הגרף של $h'(x)$

ואיזה של $h''(x)$. נמקו.

(3) כמה פתרונות יש למשוואה $h''(x) = 0$? נמקו.

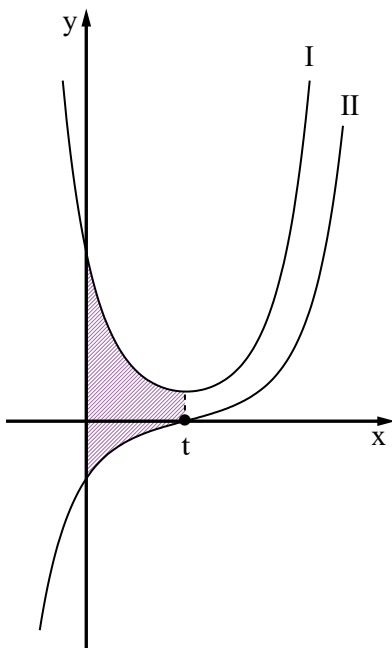
ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה I, גרף הפונקציה II, ציר ה- y

והישר $x = t$ (השטח המקוקו בציור) שווה ל- $2 - 6e$. מצאו את k .

ד. מעבירים לגרף הפונקציה $h'(x)$ משיק בנקודה $x = t$.

(1) מצאו את משוואת המשיק.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי המשיק שמצאת בסעיף ד'(1), גרף הפונקציה $h'(x)$ וציר ה- y .



5 נתונה הפונקציה $g(x) = m + mx(1 - \ln x)$. m הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ב. נתון שלפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון.

(1) מצאו את תחום הערכים של הפרמטר m .

(2) הביעו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ באמצעות m .

(3) מצאו את תחום הערכים של m שעבורם נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא נקודת מקסימום.

(4) נתון: $\int_1^2 g'(x) dx = 1 - 2 \ln 2$. חשבו את m .

ג. הראו כי למשוואה $g(x) = 0$ קיים פתרון יחיד הנמצא בתחום $3 < x < 4$.

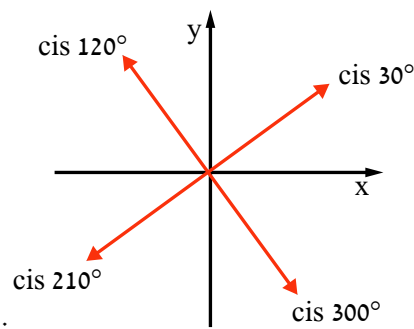
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x - g'(x)}{x}$. חשבו את $\int_1^e f(x) dx$.

תשובות למתכונת מספר 2 – שאלון 582

(1) א. $4y - 2x - 1 = 0$. ב. $A(2, 1\frac{1}{4})$, $y^2 = \frac{1}{2}x$. ג. $2y - x - 1 = 0$. ד. $4y - x - 2 = 0$.

(2) א. $y - z - 6 = 0$. ב. $\ell: \underline{x} = t(0, 1, -1)$. ג. $P(3, 1, 1\frac{1}{2})$. ד. $M(3, \frac{17}{4}, \frac{-7}{4})$. ה. $(3, 2, -4)$.

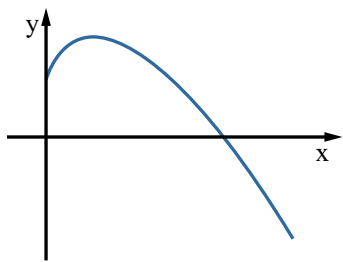


(3) א. $\text{cis } 30^\circ$, $\text{cis } 120^\circ$, $\text{cis } 210^\circ$, $\text{cis } 300^\circ$. ב. (1) . ג. (2) .20

(4) א. (1) $g(0) = e$. (2) $a = -2$, $b = 1$. ב. (1) $(1, k)$. (2) גרף II הוא גרף $h'(x)$ מכיוון שיש לו נקודת חיתוך

עם ציר ה- x ; גרף II עולה לכל x ולכן גרף I חיובי לכל x . (3) אין פתרונות מכיוון שהגרף הוא בצורת פונקציה קעורה

כלפי מעלה עם נקודת קיצון מעל לציר ה- x . ג. 2 . ד. (1) $y = 4x - 4$. (2) $2e - 4 = 1.4365$.



(5) א. $x > 0$. ב. (1) $m \neq 0$. (2) $(1, 2m)$. (3) $m > 0$. (4) $m = 1$. ד.

ה. $e^{-\frac{1}{2}} = 2.218$.