

מבחן מס' 1

משך הבחינה: שלוש וחצי שעות
פרק ראשון - אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמהברתך.

1. עובדת בחברה גדולה צריכה לנקות מדי יום את כל המשרדים של החברה. העובדת מתחילה כל יום את עבודתה באותה השעה, נוהגת לעבוד בקצב קבוע ומסיימת לנקות את כל המשרדים עד השעה 16:00.
- יום אחד היא עבדה בקצב הרגיל במשך 5 שעות והספיקה לנקות רק חלק מן המשרדים. אחר כך האטה את קצב עבודתה ל-75% מן הקצב הרגיל, לכן סיימה את ניקוי המשרדים בשעה 17:00.
- למחרת, החלה לעבוד בקצב הרגיל וניקתה 4 משרדים פחות ממספר המשרדים שניקתה ביום הקודם בקצב הרגיל. אחר-כך, הקטינה שוב את קצב עבודתה ב-75% מן הקצב הרגיל וסיימה את ניקוי כל המשרדים בשעה 17:20.
- א. באיזו שעה מתחיל יום העבודה של העובדת?
ב. כמה משרדים יש לחברה?

2. הסדרה a_1, a_2, a_3, \dots מקיימת לכל n טבעי: $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$.
- א. הוכח שהסדרה היא סדרה הנדסית.

ב. נתון גם: $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = \frac{1}{64}$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3}{4}$$

מצא את מנת הסדרה.

- ג. סכום הסדרה האינסופית $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ הוא $1365 \frac{1}{3}$. מצא את a_1 .

- ד. נתבונן בסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6$. בין כל שני איברים סמוכים של הסדרה הוכנס איבר נוסף כך שנוצרה סדרה הנדסית חדשה. חשב את סכום אברי הסדרה ההנדסית שנוצרה.

3. על אחד הרציפים בתחנת רכבת גדולה עמדו 72 נוסעים הממתינים לכניסתה של רכבת מהירה.

כאשר הרכבת עצרה בתחנה, כל האנשים עלו לרכבת. $\frac{3}{4}$ התיישבו בקומה השנייה והשאר

התיישבו בקומה הראשונה של קרונות הרכבת. $\frac{8}{9}$ מבין הנוסעים שהתיישבו בקומה השנייה

ממשיכים עד התחנה הסופית.

א. בהנחה שאין תלות בין המאורעות " הנוסע התיישב בקומה השנייה " ו- " הנוסע יורד

בתחנה הסופית " , כמה מן הנוסעים שעלו לרכבת יורדים בתחנה הסופית ?

ב. הסתבר שיש תלות בין המאורעות " הנוסע התיישב בקומה השנייה " ו- " הנוסע יורד

בתחנה הסופית " . ידוע כי $\frac{1}{7}$ מבין הנוסעים שיורדים בתחנה הסופית התיישבו בקומה הראשונה.

(1 בוחרים באקראי אחד הנוסעים שעלה לרכבת. מה ההסתברות שהוא יורד בתחנה הסופית ?

(2 כמה מן הנוסעים שהתיישבו בקומה הראשונה יורדים בתחנת ביניים ?

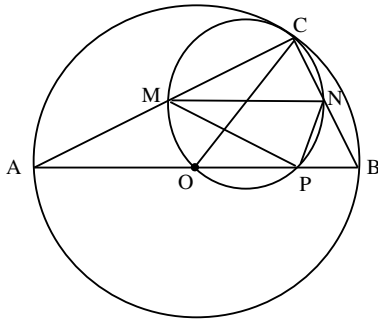
(3 בוחרים באקראי שני נוסעים שהתיישבו בקומה השנייה. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם

יורד בתחנה הסופית ?

פרק שני- גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מבין השאלות 4-5 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. הנקודה P נמצאת על הקוטר AB של מעגל שמרכזו O.

C נקודה על המעגל. הנקודה N נמצאת על המיתר BC ,

כך שהמרובע OCNP הוא בר-חסימה.

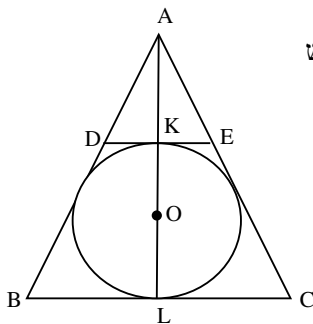
א. הוכח: $NP = NB$.

ב. המעגל החוסם את המרובע OCNP חותך

את הקטע AC בנקודה M. הוכח: $NP \perp MP$.

ג. נתון גם: $MN \parallel AB$.

הוכח כי אורך הקטע MN שווה לרדיוס המעגל O.



5. המעגל שמרכזו O חסום במשולש שווה-שוקיים ABC (ראה ציור).

הקטע AO חותך את המעגל בנקודה K והמשכו חותך את בסיס המשולש

בנקודה L. דרך הנקודה K מעבירים מקביל לבסיס BC החותך את

השוקיים AB ו- AC בנקודות D ו- E בהתאמה.

נתון: רדיוס המעגל O הוא r וזווית הבסיס של המשולש ABC היא β .

א. הבע בעזרת r ו- β את צלעות המרובע BDEC .

ב. הבע בעזרת r ו- β את שטח המשולש ADE .

ג. נתון: $\beta = 80^\circ$ חשב את היחס בין שטח המשולש ADE

לבין שטח המרובע BDEC .

שאלון 806
קיץ תשע"ה

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

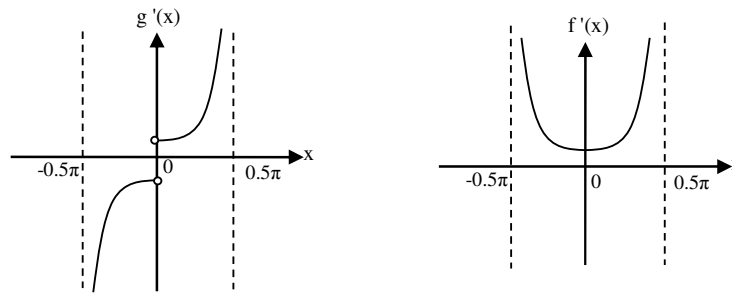
ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ ו- $g(x) = \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. הסבר מדוע כל אחת מן הפונקציות מוגדרת בתחום הנתון רק עבור $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

ב. נתונים הגרפים של הנגזרות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$:



(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. נמק.

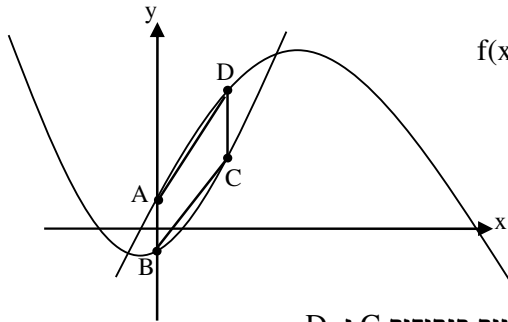
(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ואת תחומי הקעירות כלפי מטה של כל אחת מן הפונקציות. נמק.

(3) סרטט תרשים של הגרפים של כל אחת מן הפונקציות.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f'(x)$, גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- y והישר

$$x = \frac{\pi}{3}$$

(לגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $f(x)$ אין נקודות משותפות).



7. בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = 7x^2 - 40$

$$\text{ו- } g(x) = -3x^2 + 75x + 50. \text{ הגרפים של הפונקציות נחתכים}$$

בשתי נקודות (ראה ציור). הנקודות A ו- B הן נקודות החיתוך

של הגרפים של הפונקציות עם ציר ה- y . מימין לציר ה- y ,

בין שתי הנקודות בהן נחתכים הגרפים של שתי הפונקציות,

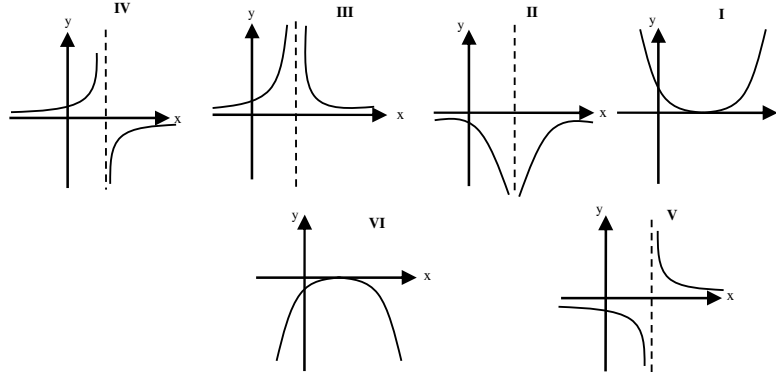
מעבירים ישר מקביל לציר ה- y החותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות C ו- D

כמתואר בציור. חשב את השטח המקסימלי של הטרפז ABCD הנוצר באופן זה.

שאלון 806
קיץ תשע"ה

8. נתונות הפונקציות : $f(x) = \frac{4}{(x-a)^2}$, $g(x) = f'(x)$, $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

א. זהה איזה מן הגרפים המתוארים בצירור הבא הוא הגרף של כל אחת מן הפונקציות הנתונות.
נמק את קביעתך.



ב. נתונה הפונקציה : $k(x) = f'(x) \cdot f''(x)$. האם ערך הפונקציה $k(x)$ בנקודה שבה $x = a + 1$ חיובי או שלילי ? נמק.

ג. באיזה תחום נמצאת הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ? נמק.

ד. הבע בעזרת a את שיעורי נקודות החיתוך של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$.
ה. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, הישר $x = a + 1$ והישר $x = a + 3$.

בהצלחה!

תשובות

1. א. בשעה 8:00 ב. 32 משרדים

2. ב. $q = \frac{1}{4}$ ג. $a_1 = 1024$ ד. 2047 או 6833. א. 64 נוסעים ב. $\frac{7}{9}$ (1) 2) 10 נוסעים (3) $\frac{472}{477} \approx 0.9895$

4. הוכחה

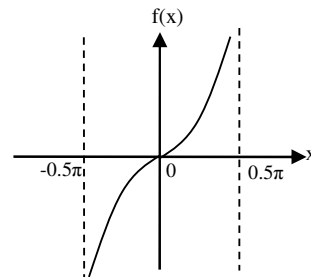
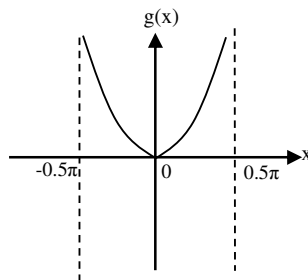
5. א. $DE = 2r \cdot \tan \frac{\beta}{2}$, $BC = \frac{2r}{\tan \frac{\beta}{2}}$

$$BD = EC = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \text{ או } BD = EC = r \left(\tan \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\beta}{2}} \right)$$

$$\text{ב. } S_{\triangle ADE} = r^2 \tan^2 \frac{\beta}{2} \tan \beta \text{ ג. } 0.983$$

6. ב. 1) $f(x)$: עולה בכל תחום הגדרתה, $g(x)$: עולה בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ויורדת בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 2) $f(x)$: קעורה כלפי מעלה בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$ וקעורה כלפי מטה בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ $g(x)$: קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה

(3)



ג. 0.639

7. השטח המקסימלי: 810 יח"ר

8. א. $f(x)$: גרף III, $g(x)$: גרף IV, $h(x)$: גרף I ב. שלילי ג. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ד. $(a-2;1)$, $(a+2;1)$ ה. $4\frac{29}{36}$

מבחן מס' 2

משך הבחינה: שלוש וחצי שעות
פרק ראשון - אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. משאית וקטנוע יוצאים בשעה 6:00 מעיר א' ונוסעים לעבר עיר ב'. המרחק בין עיר א' לעיר ב' הוא 255 ק"מ. המשאית נוסעת במהירות של 60 קמ"ש והקטנוע במהירות של 30 קמ"ש. בשעה 6:30 יוצאת מכונית מעיר ב' ונוסעת באותו כביש לעבר עיר א'. המכונית פוגשת את המשאית וכעבור חצי שעה היא פוגשת את הקטנוע.
א. באיזו שעה פוגשת המכונית את הקטנוע?
ב. באיזה מרחק מן העיר א' פוגשת המכונית את הקטנוע?

2. נתונה הסדרה: $27, \dots, -1, 9, -\frac{1}{3}, 3, -\frac{1}{9}, 1, -\frac{1}{27}$.

האיברים במקומות האי-זוגיים a_1, a_3, a_5, \dots וגם האיברים במקומות הזוגיים a_2, a_4, a_6, \dots מהווים סדרה הנדסית.

א. חשב את הסכום: $81 - 27 + 9 - 1 + 27 + \dots - \frac{1}{27} + 1 - \frac{1}{9} + 3 - \frac{1}{3} + 9 - 1 + 27 + \dots - 81$

ב. בטא את אברי הסדרה באמצעות כלל נסיגה.

ג. מגדירים סדרה חדשה: $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$ לכל n טבעי אי-זוגי.

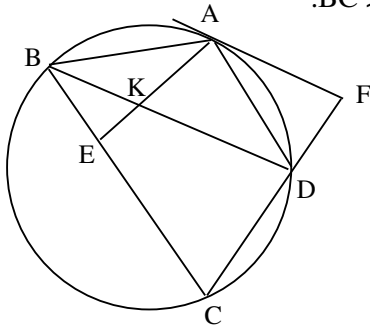
מצא נוסחה לסכום $b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2n-1}$.

3. ילד משחק עם שתי רכבות צעצוע זהות ורוצה לסדר אותן בשלוש תחנות. הוא זורק קובייה מאוזנת. אם המספר שמראה הקובייה קטן מ-4, הרכבת שבדין תעמוד בתחנה מס' 1. אם המספר שמראה הקובייה גדול מ-3 אך קטן מ-6, הרכבת תעמוד בתחנה מס' 2. אם הקובייה מראה את המספר 6, הרכבת תעמוד בתחנה מס' 3. הילד זורק את הקובייה פעם נוספת ומסדר באותו אופן גם את הרכבת השנייה.
א. ידוע שלפחות אחת הרכבות עומדת בתחנה מס' 3. מה ההסתברות שאחת הרכבות עומדת בתחנה מס' 1?
ב. הילד חוזר 5 פעמים על התהליך הנ"ל לסידור שתי הרכבות. מה ההסתברות שבדיוק 3 פעמים עמדו שתי הרכבות באותה תחנה?

פרק שני- גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת משאלות 4-5 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. המרובע ABCD חסום במעגל. נתון: $BC > AD$, $BA = AD = DC$.

א. הוכח: המרובע ABCD הנו טרפז שווה שוקיים .

ב. המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD

בנקודה F (ראה ציור). הנקודה K נמצאת על האלכסון BD

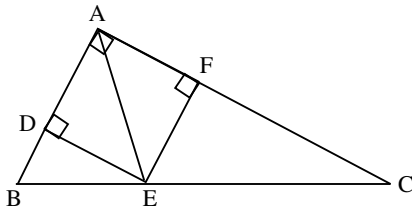
כך שמתקיים: $AK = BK$. המשך הקטע AK חותך את

הצלע BC בנקודה E.

הוכח: (1) $\triangle ABE \cong \triangle ADF$.(2) $\triangle ABK \sim \triangle DBA$.ג. נתון: $\frac{EK}{KA} = \frac{3}{5}$, $BE = 5.4$ ס"מ, $BK = 5$ ס"מ.

(1) חשב את אורך האלכסון DB.

(2) חשב את אורכי הצלעות המשולש ADF.

5. נתון משולש ישר זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$).AE חוצה את הזווית $\angle BAC$. הנקודות D ו-F

נמצאות על הניצבים AB ו-AC בהתאמה, כך

שמתקיים: $DE \perp AB$, $EF \perp AC$.נתון: $\angle B = \beta$, $DE = k$.א. הבע בעזרת k ו- β את אורך היתר BC.ב. הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC. הבע בעזרת k ו- β את אורך הקטע ME.ג. נתון: $\beta = 50^\circ$. הבע בעזרת k את המרחק בין מרכז המעגל החסום במשולש ABC לבין מרכז

המעגל החוסם את המשולש.

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

א. (1) הבע את $g'(x)$ בעזרת $f(x)$ ו- $f'(x)$.

(2) האם קיימים ערכי x עבורם מתקיים $\frac{f'(x)}{g'(x)} > 0$? נמק.

ב. עבור כל אחת מן הפונקציות מצא:

(1) אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x .

(2) נקודות חיתוך עם הצירים.

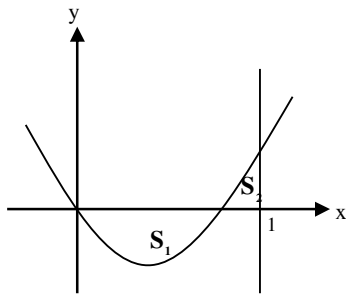
ג. לפונקציה $f(x)$ יש רק נקודת קיצון אחת בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

(1) קבע את סוג הקיצון של הפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.

ד. סרטט את הגרפים של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

ה. מהו ערך הביטוי $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ בנקודות בהן נחתכים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$?



7. נתונה הפונקציה: $y = x^2 - ax$ ($0 < a < 1$).

השטחים S_1 ו- S_2 המוגבלים בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = 1$, מסתובבים סביב ציר ה- x

(ראה שרטוט).

מצא את הערך של a עבורו סכום הנפחים של גופי

הסיבוב הנוצרים מסיבוב השטחים S_1 ו- S_2

סביב ציר ה- x , הוא מינימלי.

$$8. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 9}}$$

א. הראה כי תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $x < -3$ או $x > 3$.

ב. מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. בצויר שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון כי הנקודה $(7.32; 0.014)$ היא נקודת המקסימום של $f'(x)$.

גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה

שבה $x = 5.3$.

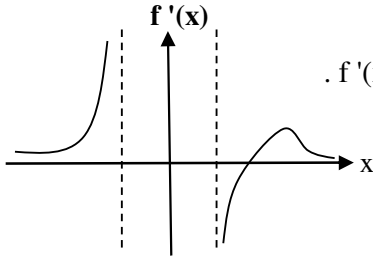
1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון ונקודת הפיתול של

הפונקציה $f(x)$. קבע את סוג הקיצון. נמק.

2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ציר ה- x ,

הישר $x = 6$ והישר $x = 10$.



בהצלחה!

תשובות

1. א. בשעה 8:30 ב. 75 ק"מ

2. א. $\frac{14}{27} \cdot 971$ ב. $a_1 = -\frac{1}{27}, a_2 = 1, a_{n+2} = 3a_n$ ג. $\frac{1-9^n}{216}$ ד.

3. א. $\frac{6}{11}$ ב. 0.2196

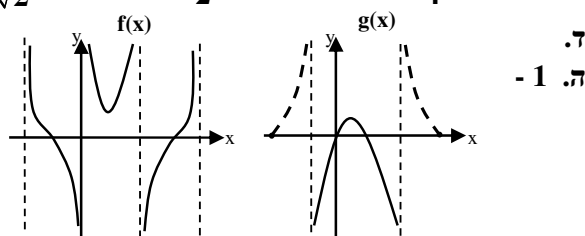
4. א. 16.2 ס"מ (1) 9 ס"מ (2) AD = 8 ס"מ, AF = 5.4 ס"מ, FD =

5. א. $k\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\cos\beta}\right)$ ב. $\frac{k \sin \frac{\beta}{2}}{\sin\beta \sin(45^\circ + \frac{\beta}{2})}$ או $\frac{k}{2 \cos \frac{\beta}{2} \sin(45^\circ + \frac{\beta}{2})}$ ג. 0.611k

6. א. 1 $g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ (2) ל

ב. 1 $f(x) : x = -\frac{\pi}{2}, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$; $g(x) : x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

2 $f(x) : \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right), \left(\frac{3\pi}{4}; 0\right)$; $g(x) : \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right), (0; 0), \left(\frac{\pi}{2}; 0\right), (\pi; 0)$

ג. 1 $\left(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$ מינימום (2) $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ מקסימום, $(\pi; 0)$ מינימום

7. א. 1

7. א. $a = \frac{3}{4}$

8. א. 2 $x = 3, x = -3, y = 1$ ב. 1 $(5.3; 0.79)$ נקודת מינימום, $(7.32; 0.81)$ נקודת פיתול (2)

ג. 0.0515

