

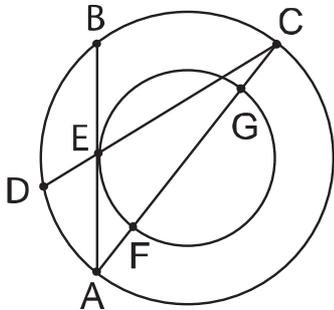
שאלון 806 - מבחן 5

פרק ראשון - אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נק')
ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נק')

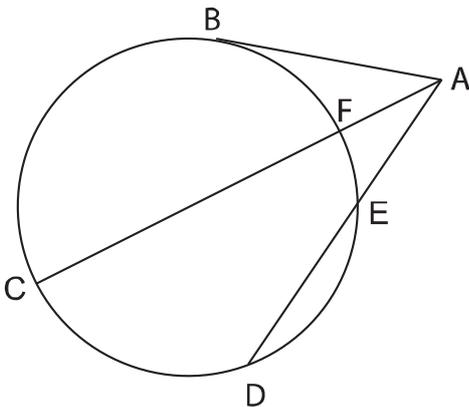
1. דניאל ויונתן מסיימים לשטוף את רחבת הריקודים במועדון, כאשר הם עובדים יחד, תוך 8 שעות. ליונתן לוקח p שעות יותר מדניאל, לסיים שטיפה של מחצית הרחבה.
א. הבע באמצעות p את משך הזמן שלוקח לדניאל לסיים לבדו את שטיפת הרחבה. עבור המשך התרגיל, בחר בפתרון הגבוה מבין השניים שקיבלת בסעיף א'.
ב. הבע באמצעות p את משך הזמן שלוקח ליונתן לסיים לבדו את שטיפת הרחבה.
ג. ביום שלישי, החל יונתן לבדו לשטוף את הרחבה בשעה 8:00 בבוקר. בשעה 9:00 הצטרף דניאל. כעבור שלוש שעות של עבודה משותפת, הסתבר כי השטח שהספיק דניאל לנקות היה גדול ב-50% מהשטח שהספיק יונתן לנקות באותו יום. מצא את ערכו של הפרמטר p .
2. סכום n האיברים הראשונים בסדרה A_n נתון בנוסחה: $S_n = n \cdot (n + 2)$.
א. הוכח שהסדרה חשבונית ומצא את משוואת האיבר הכללי שלה.
ב. הגדירו סדרה חדשה: $B_n = A_n \cdot (-1)^n$. הבע באמצעות n את סכום $2n$ האיברים הראשונים בסדרה B_n .
ג. הפרמטר m הוא חיובי. לכל אחד מאיברי הסדרה B_n הוסיפו m . את כל אחד מאיברי הסדרה A_n הכפילו פי m . סכום $2m$ האיברים הראשונים בסדרה A_n (אחרי ההכפלה) גדול פי שמונה מסכום $2m$ האיברים הראשונים בסדרה B_n . מצא את ערכו של הפרמטר m .
3. ההסתברויות שדן ושי יסיימו בהצלחה מקצה בודד של ריצה הן p ו- q בהתאמה. ההסתברות שדן יסיים בהצלחה בדיוק ארבעה מקצים מתוך שבעה, קטנה פי שלושה מההסתברות שסיים בהצלחה בדיוק שלושה מקצים מתוך השבעה. ההסתברות ששי יסיים בהצלחה שני מקצים מתוך שישה גבוהה פי 20 מההסתברות ששי יסיים בהצלחה חמישה מקצים מתוך שישה.
א. מצא את ערכם של הפרמטרים p ו- q וקבע מי מבין השניים הוא אצן מוכשר יותר.
ב. כדי להחליט מי מהשניים ישלח לייצג את התיכון באליפות העירונית בה מתקיים מקצה אחד של ריצה, הוחלט להטיל קובייה. הנעלם x מייצג את אחת הספרות המופיעות על גבי הקובייה. אם בהטלת הקובייה יתקבלו הספרה x או הספרות הנמוכות ממנה, ישלח לתחרות המועמד המוכשר יותר מבין השניים. באליפות העירונית, המועמד הנבחר עשוי לסיים בהצלחה את מקצה הריצה או להיכשל בו. ההסתברות שהמועמד שיבחר יסיים את המקצה בהצלחה, נמוכה ב- $\frac{7}{18}$ מההסתברות שיכשל. מצא את x .

פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (33 נק')¹

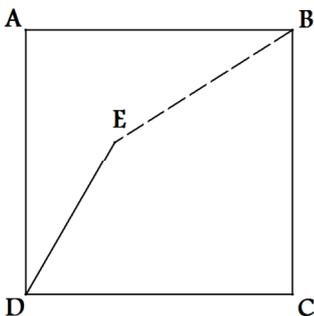
ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נק')



4. בשרטוט מופיעים שני מעגלים שמרכזם באותה נקודה.
 AC הוא קוטר במעגל הגדול ו-AB משיק למעגל הקטן בנקודה E.
 א. הוכח: $\frac{AF}{DE} = \frac{CE}{AG}$.
 ב. נתון: קוטר המעגל הגדול ארוך ב-4 ס"מ מקוטר המעגל הקטן.
 נתון: $DE \cdot CE = 16$. חשב את שטח המשולש $\triangle ACE$.
 ג. חשב את המרחק בין הנקודה E לבין הקוטר AC.



5. ישר היוצא מהנקודה A משיק למעגל בנקודה B.
 הישרים AC ו-AD חותכים את המעגל בנקודות F ו-E בהתאמה. נתון: $AC = 3AB$, $AE = 2AF$.
 א. חשב את היחס: $\frac{CF}{DE}$.
 ב. הוכח: $\triangle ACD \sim \triangle AEF$.
 ג. נתון: שטח המרובע CDEF הוא 77 סמ"ר.
 נסמן: $\angle CAD = \beta$.
 הבע באמצעות β את אורכי הצלעות AF ו-EF.



6. בריבוע ABCD ששטחו $9m^2$ נסמן: $DE = 2m$, $\angle EDC = \alpha$.
 א. הבע באמצעות α את $\cos(\angle ECD)$.
 ב. נתון: $\cos(\angle ECD) = \frac{2}{\sqrt{7}}$. מצא את ערכו של $\cos \alpha$.
 ג. הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהמרובע CDEF חסום במעגל.
 בחר בערך הנמוך של $\cos \alpha$ שמצאת בסעיף ב',
 וחשב את גודל הזוויות:
 1. $\angle EFD$ 2. $\angle EDF$.

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות שורש, פונקציות רציונליות

ופונקציות טריגונומטריות (33 נק')

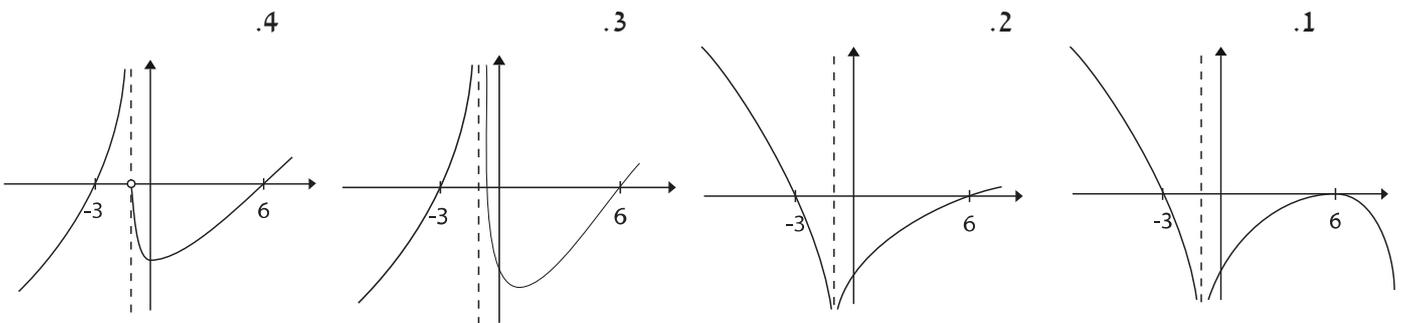
ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נק')

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = (a-2) \cdot \tan x + (4-a) \cdot \tan(x - \frac{\pi}{3})$ בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ במסגרת התחום הנתון.
- מצא את תחום הערכים של הפרמטר a , עבורם גרף $f(x)$ בהכרח עולה לכל x בתחום ההגדרה.
- הנקודה $(0, -\sqrt{3})$ היא אחת משתי נקודות הקיצון של גרף $f(x)$ בתחום הנתון. מצא את נקודת הקיצון הנוספת ואת סוגה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
- שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

8. נתונה הנגזרת השניה: $f''(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot p(x)}{(x+1)^5}$

לגרפים של $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ אותו תחום הגדרה. נתונים ארבעה גרפים:



- מצא אילו גרפים מבין הארבעה, אם בכלל, עשויים להיות גרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$ במקרה שבו הפונקציה $p(x)$: (1 חיובית לכל x , 2 שלילית לכל x).
- נתון: הפונקציה $p(x)$ חיובית לכל x . מצא את תחומי הקעירות \cup ו- \cap של גרף הפונקציה $f(x)$.
- מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$, ואת סוגן.
- נתון ששיעור ה- y של נקודת המקסימום הוא חיובי. גרף $f(x)$ חותך את ציר ה- y על הקרן השלילית שלו. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$ וקבע האם ניתן לדעת את סימני הפתרונות הללו.

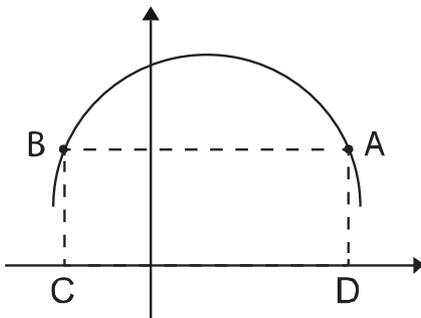
9. נתונה הנגזרת: $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x+a}}$. הישר $2y - x - 6 = 0$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת

החיתוך שלה עם ציר ה- y .

א. מצא את משוואת הפונקציה $f(x)$.

ב. נתון שרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$. המלבן ABCD

כלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ציר ה- x כמתואר בשרטוט. מצא את היקפו המקסימלי של המלבן.



בהצלחה!

פתרונות:

(1) א. דניאל: $8 - p \pm \sqrt{p^2 + 64}$. ב. יונתן: $8 + p + \sqrt{p^2 + 64}$. ג. $p = 6$.

(2) א. $A_n = 2n + 1$. ב. הסכום: $2n$. ג. $m = 4$.

(3) א. $p = 0.25$, $q = \frac{1}{3}$. שי אצן מוכשר יותר. ב. $x = 4$.

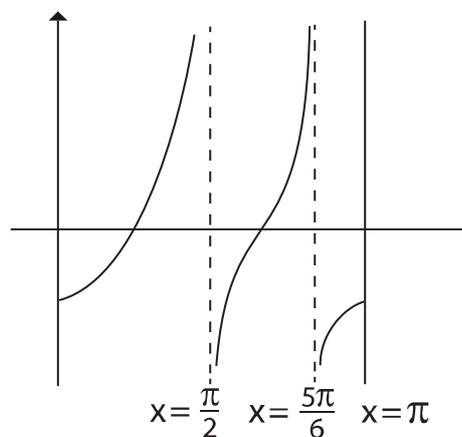
(4) ב. 12 סמ"ר. ג. 2.4 ס"מ.

(5) א. 3.2 . ג. $AF = \frac{2}{\sqrt{\sin \beta}}$, $EF = \sqrt{\frac{20 - 16 \cos \beta}{\sin \beta}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{5 - 4 \cos \beta}{\sin \beta}}$.

(6) א. $\cos(\angle ECD) = \frac{3 - 2 \cos \alpha}{\sqrt{13 - 12 \cos \alpha}}$. ב. $\cos \alpha = 0.5$ או $\cos \alpha = \frac{11}{14}$. ג. 40.89° (1) . 49.11° (2) .

(7) א. $\frac{5\pi}{6} < x \leq \pi$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. ב. $2 < a < 4$. ג. $\max(\pi, -\sqrt{3})$. ד. $(\frac{2\pi}{3}, 0)$, $(\frac{\pi}{6}, 0)$.

ה.



(8) א. (1) גרף 2. אף גרף. ב. קעירות $0 < x < 1$. קעירות $x < -1$.

ג. בנקודת המינימום $x = 6$. בנקודת המקסימום $x = -3$.

ד. ארבעה פתרונות, מתוכם שלושה שליליים ואחד חיובי.

(9) א. $f'(x) = 1 + \sqrt{-x^2 + 2x + 4}$. ב. 12 יח' אורך.