

מתכונת במתמטיקה 4-806

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 50 דקות).

פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. מעיר א' לעיר ב' אפשר להגיע בדרך סלולה שאורכה 35 ק"מ או במסלול עפר שאורכו 20 ק"מ. מהירות הרכיבה באופניים בדרך הסלולה גבוהה ביותר מ- 4 קמ"ש ממהירות הרכיבה באופניים בדרך העפר. זמן הרכיבה בדרך הסלולה ארוך ב- 30 דקות מזמן הרכיבה בדרך העפר.
- א. באיזה תחום מספרי נמצא זמן הרכיבה על אופניים בדרך העפר?
- ב. רוכב עבר את הדרך מעיר א' לעיר ב' בדרך הסלולה וחזר מיד מעיר ב' לעיר א' בדרך העפר. מהו התחום המספרי שבו נמצא הזמן שלקח הזמן מהרגע שיצא מעיר א' ועד שחזר אליה?

2. בסדרה מתקיים כלל הנסיגה:
$$a_{n+1} = \frac{4 \cdot 5^{n-1}}{a_n}$$

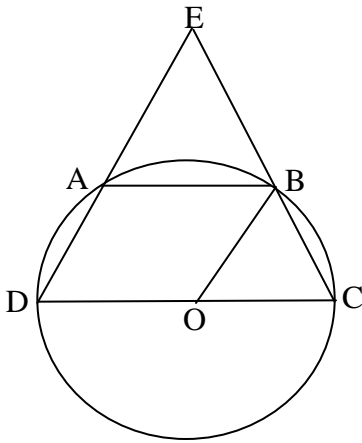
- א. הוכח שכל n מתקיים $a_{n+2} = 5a_n$
- ב. בטא באמצעות n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה העומדים במקומות הזוגיים, אם נתון ש- $a_1 = 2$
- ג. חשב את סכום עשרים האיברים הראשונים בסדרה.

3. בבית ספר מסוים ניגשו תלמידי שכבת יא' למבחן מתכונת במתמטיקה ואחר כך למבחן בגרות. מספר התלמידים שנכשלו במבחן המתכונת והצליחו במבחן הבגרות היה שווה למספר התלמידים שהצליחו במבחן המתכונת ונכשלו במבחן הבגרות.

נתון כי אחוז הנכשלים בבחינת המתכונת מתוך 500 תלמידי השכבה הוא 20%. כמו כן ידוע כי אם תלמיד הצליח במבחן המתכונת, ההסתברות שהוא יצליח בבחינת הבגרות היא 0.9.

- א. חשב את מספר התלמידים בשכבה שנכשלו בבחינת המתכונת והצליחו בבחינת הבגרות.
- ב. נבחר תלמיד באקראי וידוע כי הוא נכשל בבחינת הבגרות מה ההסתברות לכך שהתלמיד הצליח במבחן המתכונת?
- ג. מה ההסתברות לבחור תלמיד שהצליח במבחן הבגרות או/ו במבחן המתכונת.

פרק שני – יש לענות על שאלה אחת מבין השאלות 4-5.



4. במעגל שמרכזו O חסום מרובע ABCD. DC הוא קוטר.

המשכי הצלעות DA ו- CB נפגשים בנקודה E.

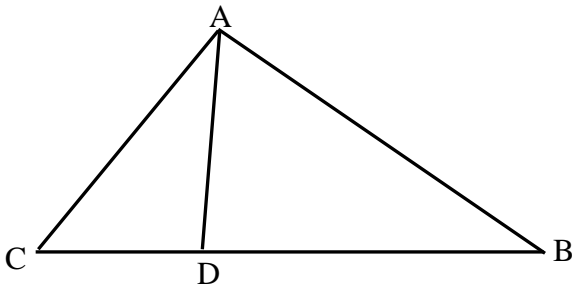
נתון: $\angle BOC = \alpha$, $OB \parallel DE$.

א. הבע באמצעות α את הזווית ABO.

ב. נתון ששטח המשולש OBC שווה לשטח המשולש BEA.

הוכח: $\triangle OBC \cong \triangle BEA$.

ג. מה גודל זווית α ? נמק.



5. במשולש ABC, D נקודה על BC כך ש: $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}$.

נתון: $\angle CAD = \alpha$, $\angle BAD = \beta$.

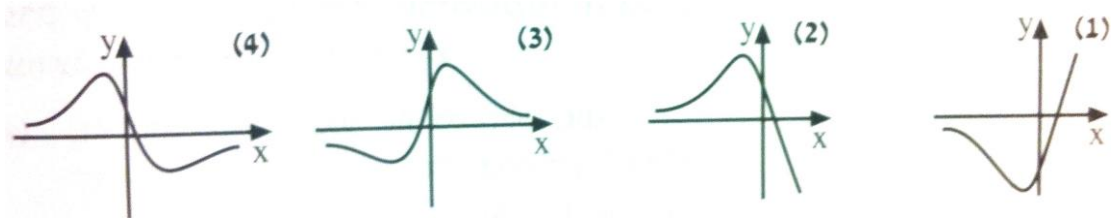
א. הבע ע"י α ו- β את היחס $\frac{AB}{AC}$.

ב. נתון: $\beta = \alpha - 15$, $\frac{AB}{AC} = \sqrt{6}$. מצא את α .

יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 6-8.

6. הנגזרת השנייה של פונקציה $f(x)$ היא $f''(x) = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. מבין הגרפים (1), (2), (3), (4) שלפניך, איזה גרף מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.



ב. (1) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) היעזר בגרף של $f'(x)$ שבסעיף א' ומצא בין אילו שני מספרים שלמים עוקבים נמצא שיעור ה- x של

של נקודת הקיצון של $f(x)$. נמק.

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע שהגרף חותך את ציר ה- x רק בנקודה אחת שבה

$$x = 3.$$

(4) ציין את מספר נקודות הקיצון של $|f'(x)|$ במקרה זה.

$$7. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{4 \sin x \cos x}{\cos 4x + 1} + 1$$$

$$א. הוכח כי מתקיים: $g(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} + 1$$$

$$ב. הוכח כי מתקיים: $g'(x) = \frac{3 - \cos 4x}{\cos^3 2x}$ ובודק האם לפונקציה יש נקודות קיצון? נמק.$$

ג. (1) בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ מצא את האסימפטוטות המקבילות לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$

(2) מצא את ערך הפונקציה כאשר $x = 0$ וכאשר $x = \frac{\pi}{2}$ (3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 0$.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, גרף הפונקציה והישר $x = \frac{\pi}{6}$.

8. הגרפים של הפונקציות : $f(x) = -x^2 + x$, $g(x) = ax^2$, $a > 0$ נחתכים בנקודות M ו-O.

מהנקודה M הורידו אנך לציר ה-x (ראה ציור - M היא לא בהכרח קודקוד הפרבולה).

א. הבע באמצעות a את שיעור הנקודה M, ואת השטח

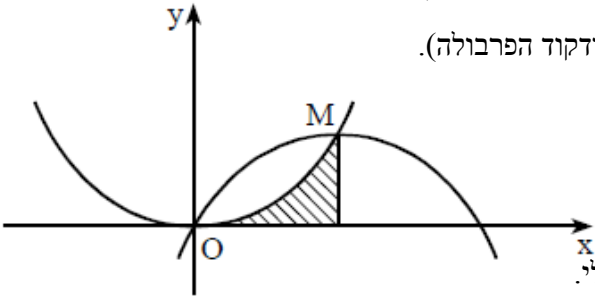
המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך ועל ידי ציר ה-x.

(השטח המקווקו בציור).

ב. חשב את הערך של a, שעבורו השטח שהבעת בסעיף א' הוא מקסימלי.

ג. $F(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $f(x)$. מצא את $F(x)$ אם יודע שעבור x מסוים ערך הפונקציה

$F(x)$ שווה ל-1, ועבור אותו x ערך הפונקציה $f'(x)$ שווה ל-3.



בהצלחה !

1. א. t - זמן רכיבה בשעות מעיר א' לעיר ב' בדרך עפר.

v_1 - מהירות רכיבה בדרך העפר, v_2 - מהירות רכיבה בדרך הסלולה.

$$\text{המכנים חיוביים לכן ניתן } v_1 = \frac{20}{t}, v_2 = \frac{35}{t+0.5} \text{ בנוסף } v_2 - v_1 > 4 \text{ לכן } \frac{35}{t+0.5} - \frac{20}{t} > 4$$

$$\text{לרשום } 35t - 20(t+0.5) > 4t(t+0.5) \Rightarrow 4t^2 - 13t + 10 < 0 \Rightarrow 1.25 < t < 2$$

זמן הרכיבה מעיר א' לעיר ב' בדרך הסלולה נמצא בין שעה ורבע לשעתיים.

$$\text{ב. } t_T = t + t + 0.5 = 2t + 0.5 \Rightarrow 3 < t_T < 4.5 \text{ כלומר זמן הרכיבה הכולל הוא בין 3 שעות ל 4.5 שעות.}$$

$$2. \text{ א. } a_{n+2} = \frac{4 \cdot 5^n}{a_{n+1}} = \frac{4 \cdot 5^n}{4 \cdot 5^{n-1}} \cdot a_n = \frac{a_n}{5^{-1}} \Rightarrow a_{n+2} = 5a_n$$

ב. קבלנו שכל האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית שהמנה שלה היא 5.

$$(a_2 = \frac{4 \cdot 5^0}{a_1} = 2) \cdot a_{\text{even}-n} = \frac{a_2(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2(5^n - 1)}{4} = 0.5(5^n - 1)$$

ג. גם האיברים שבמקומות האי זוגיים מהווים סדרה הנדסית שהמנה של היא 5 לכן

$$\cdot a_{\text{odd}-n} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2(5^n - 1)}{4} = 0.5(5^n - 1)$$

$$\cdot S_{20} = 9765624 \text{ ונקבל } n = 10 \text{ נציב } S_{2n} = S_{\text{odd}-n} + S_{\text{even}-n} = (5^n - 1)$$

3

	נכשל במתכונת \bar{A}	הצליח במתכונת A	
0.8	x	0.8-x	הצליח בבגרות B
0.2	0.2-x	x	נכשל בבגרות \bar{B}
1	0.2	0.8	

$$\cdot P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.8-x}{0.8} = 0.9 \Rightarrow x = 0.08$$

א. מספר התלמידים שנכשלו במתכונת והצליחו בבגרות $500 \cdot 0.08 = 40$

$$\text{ב. } P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4$$

$$\text{ג. } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.8 - 0.72 = 0.88$$

4. א. $OB = OC = R$ (רדיוסים במעגל) $\angle OBC = \angle OCB$ (מול צלעות שוות יש זוויות שוות)

$$\angle BOC = \alpha \quad \text{(נתון)} \quad \angle OBC = \angle OCB = 90 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{(סכום זוויות ב-} \triangle OBC \text{ שווה ל- } 180^\circ).$$

$AD \parallel BO$ (נתון) $\angle ADO = \angle BOC = \alpha$ (זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות).

מרובע ABCD חסום במעגל $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל שווה ל- 180 מעלות) $\angle ABC = 180 - \alpha$

$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC \Rightarrow \angle ABO = 180 - \alpha - 90 + \frac{\alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{(חיבור זוויות).}$$

$$\text{ב. } \underline{\angle EBA = 180 - \angle CBA = \alpha = \angle BOC} \quad \text{(זוויות צמודות).}$$

$\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל שווה ל- 180 מעלות) $\angle DAB = 90 + \frac{\alpha}{2}$

$$\underline{\angle EAB = 180 - \angle DAB = 90 - \frac{\alpha}{2} = \angle BCO} \quad \text{(זוויות צמודות).}$$

מכאן מתקבל ש- $\triangle OBC \sim \triangle BEA$ (לפי ז.ז).

נתון שיחס השטחים בין המשולשים הנ"ל הוא 1 לכן גם יחס הצלעות הוא 1 (שורש של יחס השטחים שווה

$$\text{ליחס הצלעות במשולשים דומים)} \quad OB = EB = AB = OC = R$$

התקבל שהמשולשים הנ"ל דומים לפי ז.ז.ז או ז.צ.צ או ז.ז.ז לבחירתכם.

$$\text{ג. נתון } BO \parallel ED \text{ לכן לפי תלס מתקבל } CB = R \Rightarrow \frac{OC}{DO} = \frac{CB}{BE} \Rightarrow \frac{R}{R} = \frac{CB}{R} \Rightarrow CB = R$$

התקבל שכל הצלעות ב- $\triangle BOC$ שוות לכן זה משולש שווה צלעות ומכאן שכל הזוויות במשולש זה שוות

$$\text{ל- } 60 \text{ מעלות (במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות ל- } 60 \text{ מעלות). } \angle BOC = \alpha = 60^\circ$$

5. א. נגדיר $\angle ADB = \gamma$ ולכן $\angle ADC = 180 - \gamma$ (זוויות צמודות).

$$\text{נגדיר } CD = x \text{ לכן } DB = 2x \Rightarrow CB = 3x \text{ (חיסור קטעים + נתון } \frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}).$$

$$\text{משפט הסינוסים ב- } \triangle ACD : \frac{AC}{\sin(180 - \gamma)} = \frac{x}{\sin \alpha} \Rightarrow AC = \frac{x \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\text{משפט הסינוסים ב- } \triangle ABD : \frac{AB}{\sin(\gamma)} = \frac{2x}{\sin \beta} \Rightarrow AB = \frac{2x \sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{נחלק את שני הביטויים ונקבל}$$

$$\text{ב. } \frac{AB}{AC} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin(\alpha - 15)} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{6}} \sin \alpha = \sin \alpha \cos 15 - \cos \alpha \sin 15 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

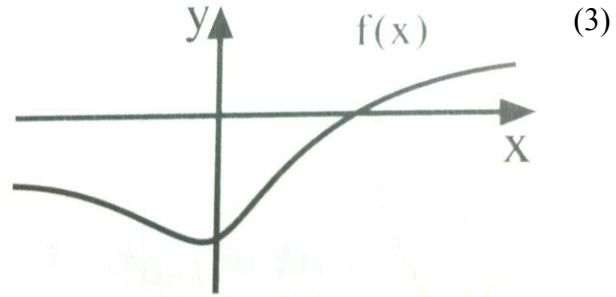
6. א. כאשר הנגזרת השנייה מתאפסת לנגזרת הראשונה יש נקודות חשודות בתור קיצון $f''(x) = 0$
 ב. $-4x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 0.5$. הנגזרת השנייה משתנה משלילית לחיובית
 כלומר $x = -1$ היא נקודת מינימום. באותו אופן מתקבל ש- $x = 0.5$ היא נקודת מקסימום. מכאן שגרף 3
 היא התשובה היחידה שמתארת את גרף הנגזרת $f'(x)$.

ב. (1) קעירות של הפונקציה מתקבלת כאשר הנגזרת השנייה מתאפסת. קעירות כלפי מטה (נגזרת שנייה שלילית), קעירות כלפי מעלה (נגזרת שנייה חיובית): $-1 < x < 0.5$.

(2) הפונקציה מקבלת קיצון כאשר הנגזרת הראשונה מתאפסת, כלומר $-1 < x < 0$ (זו נקודת מינימום).

(4) 3 נקודות קיצון. 2 בנקודות ש-

$f''(x)$ מתאפסת והנקודה שבה $f'(x)$



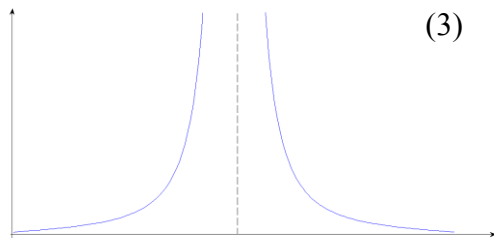
7. א. $g(x) = \frac{4 \sin x \cos x}{\cos 4x + 1} + 1 = \frac{2 \sin 2x}{2 \cos^2 2x - 1 + 1} + 1 = \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} + 1$

ב. $g'(x) = \frac{2 \cos 2x \cdot \cos^2 2x - \sin 2x \cdot 2 \cos 2x \cdot (-2 \sin 2x)}{\cos^4 2x} = \frac{2 \cos 2x (\cos^2 2x + 2 \sin^2 2x)}{\cos^4 2x}$

$g'(x) = \frac{2(1 + \sin^2 2x)}{\cos^3 2x} = \frac{2}{\cos^3 2x} \left(1 + \frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{2}{\cos^3 2x} \left(\frac{2 + 1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{3 - \cos 4x}{\cos^3 2x}$

לפונקציה אין נקודות קיצון מכיוון ש- $-1 < \cos 4x < 1$ ולכן $g'(x) \neq 0$

ג. (1) אסימפטוטות אנכיות $\cos^2 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$



(3) $g(0) = g(\pi/2) = 1$ (2)

ד. $g'(0) = 2$ ו- $g(0) = 1$ לכן $y = 2x + 1$

ה. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \int -\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{2 \cos 2x}$

$S = \int_0^{\pi/6} (g(x) - 2x - 1) dx = \frac{1}{2 \cos 2x} - x^2 \Big|_0^{\pi/6} = 0.5 - \pi^2/36$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow ax^2 = -x^2 + x \Rightarrow x[x(a+1) - 1] = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a+1}, x = 0 \quad \text{א. 8}$$

$$.S = \int_0^{\frac{1}{a+1}} ax^2 \cdot dx = \frac{ax^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{a+1}} = \frac{a}{3(a+1)^3} \quad \text{והשטח הוא } \left(\frac{1}{a+1}, \frac{a}{(a+1)^2}\right) : M \text{ נקודה}$$

$$S' = \frac{3(a+1)^3 - 9a(a+1)^2}{9(a+1)^6} = \frac{3(a+1)^2}{9(a+1)^6} [a+1 - 3a] = \frac{3(a+1)^2}{9(a+1)^6} (1-2a) \quad \text{ב.}$$

$$1-2a \quad S' = 0 \Rightarrow a = 0.5 \quad \text{נראה שמדובר בשטח מקסימלי, נגזור רק את החלק הלא חיובי } -1-2a$$

$$.S'' = -2 < 0 \Rightarrow \max \quad \text{לכן נקבל}$$

$$.F(x) = \int f(x) dx = \int (-x^2 + x) dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C \quad \text{ג.}$$

$$.(-1,1) \text{ היא } F(x) \text{ הפונקציה שמקיימת את הפונקציה } f'(x) = -2x + 1 = 3 \Rightarrow x = -1$$

$$F(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \quad \text{מכאן מתקבל ש-} F(-1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{6}$$