

## מתכונת במתמטיקה 1- כיתה יא'

משך המבחן 3.5 שעות (הארכת זמן של 45 דקות).

### פרק ראשון – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 1-3

1. רוכב אופניים אחד יצא מיישוב A אל ישוב B. באותה שעה בדיוק יצא רוכב אופניים שני מהישוב B אל הישוב A. שני רוכבי האופניים נפגשו אחרי 4 שעות. הזמן שדרוש לרוכב האופניים שיצא מ-A לעבור את הדרך בין A ל-B, גדול ב-108 דקות מהזמן שדרוש לרוכב האופניים שיצא מ-B לעבור דרך זו.  
א. מצא את היחס בין המהירות של רוכב האופניים שיצא מ-B לבין מהירות של רוכב האופניים שיצא מ-A.

ב. מצא בכמה שעות עבר כל אחד מרוכבי האופניים את הדרך שבין A ל-B.

2. נתונה סדרה הנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

א. האיבר השלישי בסדרה  $a_n$  גדול ב-2 מאיבר השני, והאיבר הרביעי גדול פי 2 מהאיבר השלישי.

מצא את  $a_1$

ב. נתונה סדרה הנדסית נוספת  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$

משתי הסדרות בונים סדרה הנדסית חדשה:  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$

מנת הסדרה החדשה היא 3, וסכום 10 האיברים הראשונים בסדרה החדשה הוא 7381

(1) מצא את האיבר הראשון בסדרה החדשה, ומצא את  $b_1$ .

(2) מצא את מנת הסדרה  $b_n$ .

(3) מצא את n שעבורו  $b_n = 4 \cdot \frac{8}{27}$

3. נתון כי אם בוחרים באקראי 3 אנשים מעיר גדולה מאוד, אז ההסתברות שלכל היותר 2 מהם אוהבים מוזיקה קלאסית היא 0.657.

א. בוחרים באקראי 10 אנשים מעיר זו.

מהי ההסתברות שבדיוק 6 מהם אוהבים מוזיקה קלאסית?

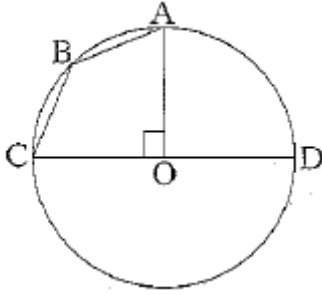
בוחרים באקראי מעיר זו קבוצה של 5 אנשים, ואחר כך בוחרים קבוצה נוספת של 5 אנשים.

ב. מהי ההסתברות שבכל אחת מהקבוצות יהיו בדיוק 3 אנשים שאוהבים מוזיקה קלאסית?

ג. אם ידוע כי בשתי הקבוצות ביחד יש בדיוק 6 אנשים שאוהבים מוזיקה קלאסית, מהי ההסתברות שבכל

אחת מהקבוצות יהיו בדיוק 3 אנשים שאוהבים מוזיקה קלאסית?

פרק שני – יש לענות על שאלה אחת מבין השאלות 4-5.



4. במעגל שמרכזו O הרדיוס AO מאונך לקוטר CD (ראה ציור)

א. מצא את גודל הזווית ABC. נמק.

נתון גם כי  $\angle BCA = \angle BAC$

ב. הוכח כי  $BO \perp AC$

ג. BO ו- AC נחתכים בנקודה M.

הוכח כי  $CM = OM$

5. שטחו של משולש ABC הוא  $3\sqrt{3}$  סמ"ר.

נתון :  $\angle BAC = 120^\circ$   $BC = \sqrt{37}$  [cm]

א. חשב את אורכי הצלעות AB ו- AC.

ב. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש.

פרק שלישי – יש לענות על 2 שאלות מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{Ax - x^2 - 16}{Bx^2}$ , A ו-B הם פרמטרים.

הישר  $y = -1$  הוא אסימפטוטה של הפונקציה.

שיפוע הישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = -2$  הוא  $-6.5$ .

א. מצא את הערך של B ואת הערך של A.

ב. הצב את הערכים של A ו-B ומצא:

(1) את תחום הגדרה של הפונקציה.

(2) את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

(4) נקודות קיצון של הפונקציה, ומצא את סוגן.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הפונקציה  $g(x) = (f(x))^2$ .

מצא לאילו ערכים של  $k$ , המשוואה  $y = k$  לא חותכת את  $g(x)$

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 2}$

א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה, מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. מצא את גודל הזווית בין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  ובין המשיק, שאת משוואתו מצאת בסעיף א'.

8. נתונה הפונקציה  $f(x) = 3 - \cos x - \sin^2 x$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ . עבור התחום הנתון ענה על

הסעיפים הבאים:

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. (1) שרטט סקיצה של הפונקציה.

(2) שרטט גרף של הנגזרת  $f'(x)$ .  $f(x)$  גזירה גם בקצות התחום הנתון.

(3) מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף הנגזרת וציר ה- $x$  בתחום  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ .

**בהצלחה !**

1. x- הדרך בק"מ מ-A ל-B.

$v_1$  - המהירות בק"מ של הרוכב שיצא מ-A.  $v_2$  - המהירות בק"מ של הרוכב שיצא מ-B הדרך המשותפת עד הפגישה היא  $4v_1 + 4v_2 = x$ .

$$\frac{x}{v_1} - \frac{x}{v_2} = 1.8$$

$$\frac{4v_1}{v_1} + \frac{4v_2}{v_1} - \frac{4v_2}{v_2} - \frac{4v_1}{v_2} = 1.8 \Rightarrow 4 \frac{v_2}{v_1} - 4 \frac{v_1}{v_2} = 1.8$$

$$4p - \frac{4}{p} = 1.8 \Rightarrow 4p^2 - 1.8p - 4 = 0 \Rightarrow p = 1.25, p = -0.8$$

ולכן  $\frac{v_2}{v_1} = p$  ומובן שרק הפתרון החיובי רלוונטי.

$$t_1 = \frac{x}{v_2} = \frac{4v_1 + 4v_2}{v_2} = 4 + 0.8 \cdot 4 = 7.2 \quad t_1 = \frac{x}{v_1} = \frac{4v_1 + 4v_2}{v_1} = 4 + 1.25 \cdot 4 = 9$$

היחס בין המהירות של הרוכבים הוא 1.25. הרוכב שיצא מ-B עובר את הדרך כולה ב- 7.2 שעות, והרוכב שיצא מ-A עובר את הדרך כולה ב- 9 שעות.

$$2. \text{ א. } a_4 = 2a_3 \Rightarrow a_1 q^3 = 2a_1 q^2 \Rightarrow q = 2$$

$$a_2 + 2 = a_3 \Rightarrow a_1 q + 2 = a_1 q^2 \Rightarrow 2a_1 + 2 = 4a_1 \Rightarrow a_1 = 1$$

ב. נקרא לסדרה החדשה  $c_n$ .

$$S_{10} = \frac{c_1(3^{10} - 1)}{(3 - 1)} = 7381 \Rightarrow c_1 = 0.25 \Rightarrow c_1 = \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow b_1 = 4 \quad (1)$$

$$\frac{\frac{a_2}{b_2}}{\frac{a_1}{b_1}} = 3 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{b_1}{b_2} = 3 \Rightarrow 2 \frac{b_1}{b_1 q} = 3 \Rightarrow q = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$b_n = 4 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 4 \cdot \frac{8}{27} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow n = 4 \quad (3)$$

p - הסתברות שאדם בודד אוהב מוזיקה קלאסית. בעזרת מאורע משלים וברנולי: הכול פחות ההסתברות

$$P(3) = \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = 1 - 0.657 \Rightarrow p = 0.7$$

$$P(6) = \binom{10}{6} (0.7)^6 (0.3)^4 = 0.2001 \quad \text{א.}$$

ב. נדרוש שגם בקבוצה הראשונה 3 אוהבים מתוך 5 וגם בקבוצה השנייה 3 אוהבים מתוך 5 -

$$P_1(3) \cdot P_2(3) = \left( \binom{5}{3} (0.7)^3 (0.3)^2 \right)^2 = 0.0953$$

ג. מרחב המדגם שלנו הוא - זהה לתשובה של סעיף א'. למי שלא בטוח ניתן גם לחשב

$$\Omega = 2 \cdot P_1(5)P_2(1) + 2 \cdot P_1(4)P_2(2) + P_1(3)P_2(3)$$

$$\Omega = 2 \cdot \binom{5}{5} 0.7^5 \cdot \binom{5}{1} (0.7)(0.3)^4 + 2 \cdot \binom{5}{4} (0.7)^4 (0.3) \cdot \binom{5}{2} (0.7)^2 (0.3)^3 + \binom{5}{3} (0.7)^3 (0.3)^2 \cdot \binom{5}{3} (0.7)^3 (0.3)^2 = 0.2001$$

הסברות מותנית - מתוך מרחב המדגם בדיוק 3 מכל קבוצה אוהבים מוזיקה קלאסית, חלקי ההסתברות של מרחב המדגם  $P = 0.0953/0.2001 = 0.4762$

4. א. הקשת AC שווה ל-90 (נתון שזווית COA זווית מרכזית בת 90 מעלות)

הקשת CA שווה ל-270 (חיסור זוויות).

$\angle CBA = 135$  (זווית היקפית שווה למחצית הקשת, זווית מרכזית, שעליה היא נשענת)

ב.  $CO=AO$  (שני רדיוסים במעגל) ולכן  $\triangle AOC$  הוא מש"ש (משולש שבו השוקים שוות הוא מש"ש).

$\angle BCA = \angle BAC$  (נתון) ולכן  $\triangle ABC$  מש"ש (משולש שבו זוויות הבסיס שוות הוא מש"ש).

$ABCO$  הוא דלתון (שני משולשים שווה שוקים בעלי בסיס משותף).

$BO \perp AC$  (בדלתון האלכסונים מאונכים זה לזה).

ג.  $CM = CA$  (האלכסון OB חוצה את CA – תכונה של דלתון).

ב.  $\triangle AOC$  הוא תיכון ליתר לכן  $OM = CM = MA$  (תיכון ליתר שווה למחצית היתר).

5. נגדיר  $AB = x, AC = y$ . על פי הנוסחא לחישוב שטח של משולש מתקבל:

$$S = \frac{1}{2}xy \cdot \sin 120^\circ = 3\sqrt{3} \Rightarrow xy = 12$$

על פי משפט הקוסינוסים מתקבל:  $37 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120 \Rightarrow 37 = x^2 + y^2 + xy$

$$x^2 + \frac{144}{x^2} + 12 = 37 \Rightarrow x = 4, 3 \text{ cm} \Rightarrow y = 3, 4 \text{ cm}$$

ב. בניית עזר: נבנה בתוך המשולש את המעגל החסום ונעביר רדיוס ממרכז המעגל BC. בנוסף נעביר שני קווים ממרכז המעגל לקודקודים C ו-B.

לפי משפט הסינוסים במשולש ACB נקבל:

$$\frac{CB}{\sin 120} = \frac{AC}{\sin \angle ACB} \Rightarrow \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{3} \cdot 4}{2 \cdot \sqrt{37}} \Rightarrow \angle ACB = 34.715$$

$\angle ABC = 25.285$  (סכום זוויות במשולש ABC שווה ל-180)

OC חוצה זווית C ו-OB חוצה זווית B (מרכז המעגל החסום הוא נקודת מפגש חוצי הזוויות).

לכן נקבל במשולש COB את הזוויות: 150, 17.36, 12.64.

$$\frac{\sqrt{37}}{\sin 150} = \frac{OC}{\sin 12.64} \Rightarrow OC = 2.66$$

לפי משפט הסינוסים:  $OC = 2.66$

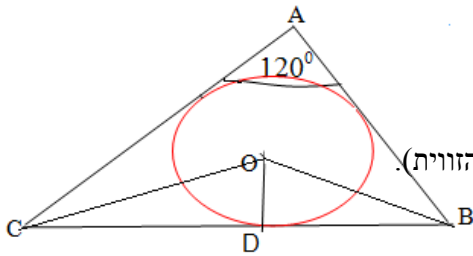
זווית בין משיק לרדיוס שווה ל-90 מעלות לכן  $OD \perp CB$ .

$$\frac{OD}{OC} = \sin 17.36 \Rightarrow OD = r = 0.793 \text{ cm}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax/x^2 - x^2/x^2 - 16/x^2}{Bx^2/x^2} = \frac{-1}{B} = -1 \Rightarrow B = 1$$

$$f'(x) = \frac{(A-2x)x^2 - 2x(Ax - x^2 - 16)}{x^4}, f'(-2) = -6.5 \Rightarrow A = 10$$

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$$



ב. (1) תחום הגדרה:  $x \neq 0$

$$(2) \text{ חיתוך עם הצירים: } \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2} = 0 \Rightarrow (2,0), (8,0)$$

$$(3) \text{ אסימפטוטה אנכית מתקבלת ב- } x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2/x^2 + 10x/x^2 - 16/x^2}{x^2/x^2} = -1 \text{ אסימפטוטה אופקית}$$

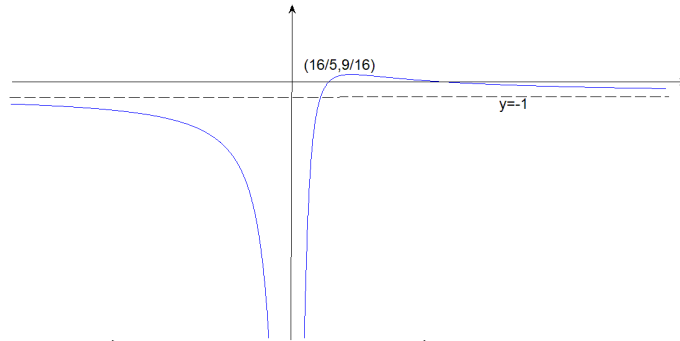
(4) נקודות קיצון:

$$f'(x) = \frac{(10-2x)x^2 - 2x(10x-x^2-16)}{x^4} = \frac{-10x^2 + 32x}{x^4} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 16/5$$

כמוכן שהפתרון היחיד שבתחום ההגדרה הוא  $\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{16}\right)$

$$f''(x) = -20x + 32 \Rightarrow f''(16/5) = -32 < 0 \Rightarrow \max$$

ג.



ד.  $g(x)$  היא פונקציה חיובית שעל פי הציור  $0 \leq g(x) < \infty$  לכן עבור  $k < 0$  אין נקודות חיתוך.

$$7. \text{ השיפוע של המשיק: } m = f'(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$m' = f''(x) = \frac{4x\sqrt{x^2 + 2} - 2(x^2 + 1) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}}}{x^2 + 2} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 + 2)^{1.5}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

נראה שזו נקודת מינימום -  $m'' = 6x^2 + 6 \Rightarrow m''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \min$

את המונח. השיפוע הוא  $m = \sqrt{2}$  ונקודת ההשקה היא  $(0, \sqrt{2})$  ולכן משואת המשיק היא  $y = \sqrt{2}x$ .

$$b. \tan \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 54.736^\circ \text{ לכן מתקבל}$$

8. א. חיתוך עם הצירים:  $f(0) = 2, (0,2)$

$$3 - \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow 3 - \cos x - 1 + \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \cos x + 2 = 0$$

$$b. f(-x) = 3 - \cos(-x) - \sin^2(-x) = 3 - \cos x - (\sin x)^2 = 3 - \cos x - \sin^2 x = f(x)$$

ג. קיצון של קצה קטע:  $(-\pi, 4), (\pi, 4)$

$$f'(x) = \sin x - 2\sin x \cos x = \sin x(1 - 2\cos x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0, \cos x = 0.5$$

הפתרונות שמתקבלים הם:  $x = -\pi, 0, \pi$  ו-  $x = \pm\pi/3$ .

נקודות הקיצון הן:  $(\pi, 4), (-\pi, 4), (0, 2), (\pi/3, 1.75), (-\pi/3, 1.75)$ .

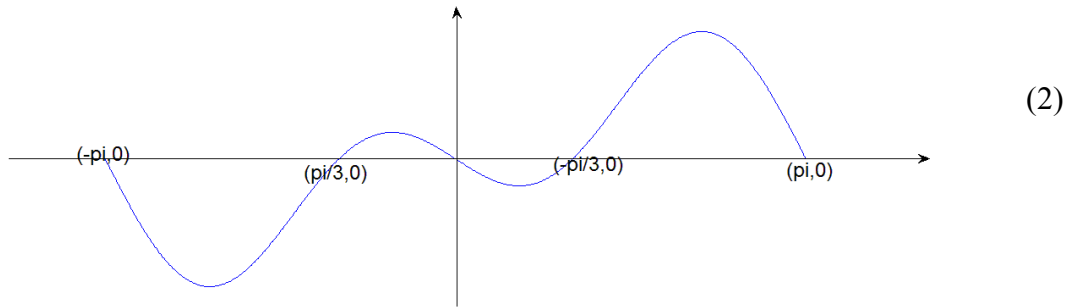
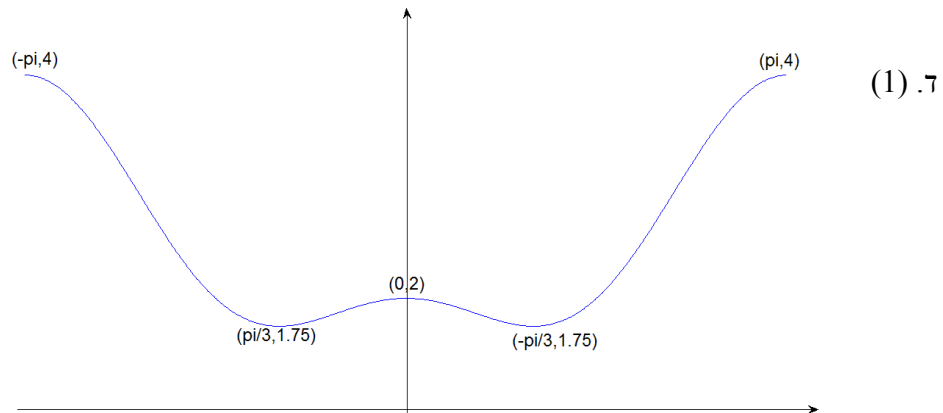
המקסימום המוחלט מתקבל ב-  $(\pi, 4), (-\pi, 4)$  והמינימום המוחלט ב-  $(\pi/3, 1.75), (-\pi/3, 1.75)$ .

נאפיין את שאר הקיצון לסעיפים הבאים:  $f''(x) = \cos x - 2\cos 2x$ . לכן  $f''(-\pi) = -3 < 0 \Rightarrow \max$ .

$f''(\pi/3) = 1.5 > 0 \Rightarrow \min$ ,  $f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow \max$ ,  $f''(-\pi/3) = 1.5 > 0 \Rightarrow \min$ .

$f''(\pi) = 3 < 0 \Rightarrow \max$ . ניתן היה להציב לנגזרת את קצות הקטע מכיוון שבמקרה זה הם במקרה גם אפסו

את הנגזרת הראשונה.



(3) נחלק את האינטגרל לשני חלקים:  $S = \int_{-\pi/3}^0 f'(x)dx - \int_0^{\pi/3} f'(x)dx$

$S = f(x)|_{-\pi/3}^0 - f(x)|_0^{\pi/3} = f(0) - f(-\pi/3) - f(\pi/3) + f(0) = 0.5$

ניתן גם היה לזהות שפונקציית הנגזרת היא אי זוגית ולחסוך חלק מהחישוב.