

# המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

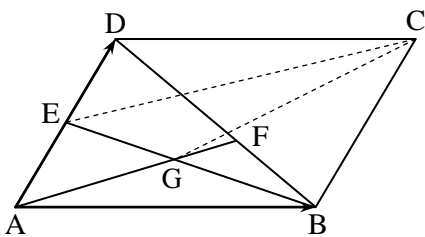
## מבחן מתכונת 2 – תשפ"א

### שאלון 035582

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.  
משך המבחן: שעתיים 50 דק'.  
מבנה השאלון: במבחן 5 שאלות, עליך לענות על 3 שאלות, לבחירתך.  
אם תענה על יותר מ-3 שאלות תיבדקנה רק ה-3 השאלות הראשונות שבמחברתך!  
מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.  
שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לבנות ולבנים כאחד.  
הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

### חלק א' – וקטורים, טריגונומטריה במרחב, גיאומטריה אנליטית ומספרים מרוכבים

1. א. מעגל שמרכזו N ומשוואתו היא:  $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 40 = 0$  משיק מבחוץ למעגל שמרכזו M העובר דרך הנקודות  $(2, 4)$ ,  $(-2, 0)$ . מצא את משוואת המעגל שמרכזו M.
- ב. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שמרכזו M שווה לאורך המשיק מהן למעגל שמרכזו N.
- נתון מעגל נוסף שמרכזו P ומשוואתו היא:  $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 40$ .
- ג. (1) הראה כי המעגל שמרכזו P עובר דרך הנקודות  $(2, 4)$ ,  $(-2, 0)$  ומשיק למעגל שמרכזו N.  
(2) חשב את משוואת חוצה הזווית  $\sphericalangle PNM$ .



2. נתונה המקבילית ABCD. הנקודה E היא אמצע הצלע AD והנקודה F נמצאת על האלכסון BD כך ש-  $BF:FD = 2:3$ .

נסמן:  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AD} = \underline{v}$ .

א. G היא נקודת החיתוך של  $\vec{AF}$  ו-  $\vec{BE}$ .

חשב את היחס בו מחלקת הנקודה G את  $\vec{BE}$ .

ב. נתון:  $|\underline{u}| = 7$ ,  $|\underline{v}| = 14$ ,  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 49$ . חשב את  $\sphericalangle ECG$ .

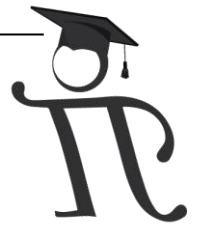
3. שלושת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית הם:  $a_1 = m$ ,  $a_2 = 2i$ ,  $a_3 = 2(m - 2)$ , m מספר מרוכב.

א. מצא את m אם נתון שהוא נמצא ברביע הרביעי.

ב. חשב את שטח המשולש שקדקודיו הם  $a_2$ ,  $a_3$  ו-  $a_4$ .

ג. הוכח כי לכל n טבעי, האיברים המיוצגים על ידי  $a_{4n+9}$  נמצאים על ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים.

ד. חשב את סכום 16 האיברים הראשונים של הסדרה.



# המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

## התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

**חלק ב' – חזו"א ואלגברה של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, בעיות גדילה ודעיכה**

4. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם קיימים).  
 (3) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים (אם קיימות).  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ג. ידוע כי הפונקציה:  $h(x) = f(x) + c$  היא אי-זוגית. מצא את  $c$ . הצג בדיקה של פתרוןך.

ד. נתון כי מתקיים:  $\int_a^b f(x) dx = t(b-a)$ , פרמטרים  $a, b, t$ ,  $0 < a < b$ .

(1) מצא את תחום הערכים האפשריים של הפרמטר  $t$ .

(2) הבע באמצעות  $a, b$  ו- $t$  את  $\int_{-b}^{-a} f(x) dx$ .

ה. נתונה הפונקציה:  $g(x) = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}}{x^2 + x^2 e^{\frac{1}{x}}}$

- (1) הראה כי מתקיים:  $g(x) > f(x)$ , בתחומים בהם שתי הפונקציות מוגדרות.  
 (2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציות  $f(x)$ ,  $g(x)$  והישרים:  $x = -2$ ,  $x = -1$ .

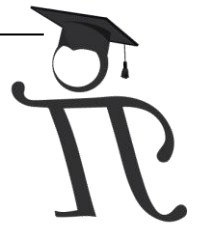
5. נתונות שתי הפונקציות:  $f(x) = x^2 \ln x$ ,  $g(x) = ax \ln x + x$ , פרמטר  $a$ .

- א. ישר המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה שבה  $x = e^{-\frac{7}{4}}$  מאונך לישר  $y = ax + 2$ .  
 מצא את שני הערכים האפשריים של  $a$ .

הצב את הערך הגדול מבין שני ערכי  $a$  שמצאת בסעיף א', וענה על הסעיפים הבאים:

- ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .  
 (2) מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  עם ציר ה- $x$ .  
 (3) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .  
 ג. (1) שרטט במערכת צירים אחת את הגרף של הפונקציה  $g(x)$  ואת הגרף של הישר  $y = ax + 2$  (עבור ערך ה- $a$  הגדול מבין השניים).  
 (2) מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$  החותך את שני הגרפים ששרטטת בסעיף ג(1) בנקודות A ו-B. מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודות A ו-B עבורו האורך AB מקסימלי.  
 ד. דרך נקודת המינימום של הפונקציה  $g(x)$  העבירו ישר המאונך לציר ה- $x$ . חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי ישר זה.

**בהצלחה!**



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר  
התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות סופיות

ג. (2)  $y = -1$

ג. (1) הוכחה

ב.  $y = 3x - 12$

א. 1.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$

ב.  $13.89^\circ$

א. 2.  $BG : GE = 4 : 3$

ד.  $-153 + 51i$

ג. הוכחה

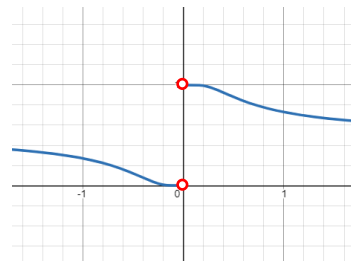
ב. 10

א. 3.  $m = 1 - i$

ג. (3)  $y = \frac{1}{2}$

ב. (2) ירידה:  $x < 0$ , עלייה:  $x > 0$

א. 4.  $x > 0$ ,  $x < 0$



ב.

ג. (2) 0.1608

ה. (1) הוכחה

ד. (1)  $0.5 < t < 1$  (2)  $(1-t)(b-a)$

ג. הוכחה,  $c = -0.5$

ב. (1)  $g(x) : x > 0$ ;  $f(x) : x > 0$

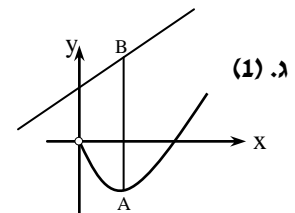
א. 5.  $a = -\frac{2}{3}$ ,  $a = 2$

ג. (3)  $g(x) : (e^{-1.5}, -2e^{-1.5}) \min$ ;  $f(x) : (e^{-0.5}, -0.5e^{-1}) \min$

א. (2)  $g(x) : (e^{-0.5}, 0)$ ;  $f(x) : (1, 0)$

ד. 0.109

ב. (2)  $x = e^{-0.5}$



ג. (1)