מבחן מתכונת 1 – תשפ"א

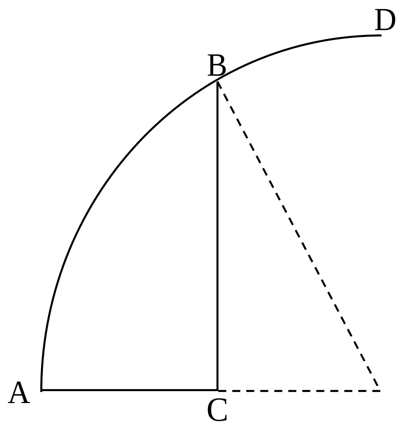
שאלון 035581

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.
משך המבחן: ארבע שעות ו23 דק'.
מבנה השאלון: במבחן 8 שאלות, עליך לענות על 5 שאלות, לבחירתך.
אם תענה על יותר מ-5 שאלות, ייבדקו רק ה-5 השאלות הראשונות שבמחברתך!
מפתח ההערכה: ניקוד שווה לכל שאלה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.
הבהרות: שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לנבחנות ולנבחנים כאחד.
כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות).

פרק א' – אלגברה ובעיות מילוליות, סדרות, הסתברות

1. בר ואילן, שני חברים חובבי טיפוס, יצאו מנקודה A בתחתית ההר לנקודה B על ההר. ידוע כי AB היא קשת במעגל שאורכה שווה ל $\frac{1}{6}$ מהיקפו. בר בחרה ללכת דרך שביל הגישה AC ולטפס דרך מסלול היתדות CB ($AC \perp CB$).
אילן בחר לטפס דרך מסלול למיטבי לכת על הקשת AB במהירות קבועה.

ידוע שמהירות הליכתה של בר בשביל הגישה AC גדולה פי 3 ממהירות הטיפוס שלה במסלול היתדות CB. המהירויות של בר קבועות בכל אחד מהמקטעים. שני המטפסים הגיעו באותו הזמן לנקודה B.



א. מצא את היחס בין המהירות של אילן למהירות של בר בשביל הגישה. (דייק עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

לאחר שהגיעו לנקודה B החליטה בר לרדת מיד במורד הקשת AB במהירות קבועה השווה למהירות שבה צעדה בשביל הגישה AC. לעומת זאת, אילן החליט שהוא ממשיך לתצפית בנקודה הגבוהה ביותר על ההר D (AD הוא רבע מהיקף המעגל) במהירות קבועה הגדולה פי 3 מהמהירות שבה בר צעדה בשביל הגישה AC, ומיד חוזר חזרה לנקודה A במורד הקשת AD באותה המהירות.

ידוע שאורך הקשת AD הוא 3π ק"מ.

ב. מצא את המרחק הגדול ביותר ביניהם.

ג. (1) מצא כמה פעמים במהלך החזרה של בר היה המרחק בין בר לאילן 2 ק"מ. נמק.

(2) מצא כמה פעמים במהלך החזרה של בר היה המרחק בין בר לאילן 3 ק"מ. נמק.

.2 נתונה סדרה שכל איבריה שונים מ- 0 , המוגדרת על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{2n+5}{2n+3}\cdot a_n$.

א. הוכח: $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$, והסבר מה משמעות שוויון זה בהתייחס לסדרה הנתונה.

ב. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא תקפה או שגויה. נמק קביעתך בפירוט.

1) הסדרה בהכרח עולה.

2) אם a_1 מתחלק ב-5 (עם שארית 0) אזי כל האיברים בסדרה שלמים.

3) ייתכנו 3 איברים עוקבים בסדרה המהווים סדרה הנדסית.

נתון בנוסף כי a_1 מתחלק ב-5 (עם שארית 0), וכי a_{29} הוא האיבר הראשון בסדרה הגדול מ 60 .

ג. חשב את a_1 .

ד. המשיכו את איברי הסדרה עד לאינסוף. היעזר בזהות: $\frac{1}{a(a+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)$

וחשב את סכום הביטוי האינסופי: $\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_2\cdot a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}+\ldots$.

.3 בבדיקה מיוחדת ניתן לקבוע אם אדם נושא בדמו נגיף של מחלה מסוימת. ידוע ש – 20% מהנבדקים נושאים בדמם את הנגיף. כאשר נבדק נושא את הנגיף בדמו ההסתברות שהבדיקה תקבע שהוא נושא את הנגיף היא 0.8 . אם הנבדק לא נושא את הנגיף בדמו ההסתברות שהבדיקה תקבע שהוא לא נושא את הנגיף היא 0.9 .

א. אדם נבדק בבדיקה הנ״ל. מה ההסתברות שהבדיקה תקבע שהוא נושא את הנגיף?

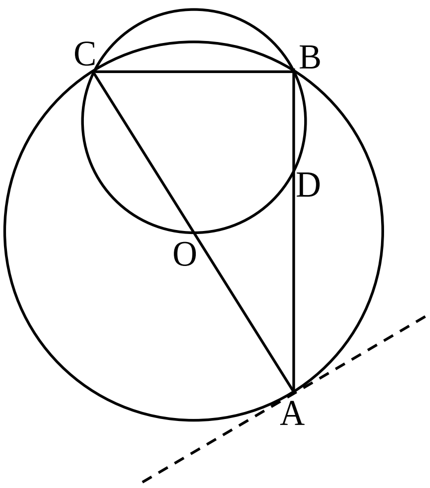
ב. הבדיקה קבעה לגבי נבדק שהוא נושא את הנגיף. מה ההסתברות שהוא אכן נושא את הנגיף?

ג. 6 נבדקים נבדקו בבדיקה הנ״ל. מה ההסתברות שהבדיקה תטעה לגבי לכל הפחות שניים מהם?

ד. לכל מי שהבדיקה הראתה שהוא נושא את הנגיף נתנו תרופה מסוימת. התרופה גרמה לתופעות לוואי אצל 70% מאלה שנושאים את הנגיף ואצל 20% מאלה שלא נושאים את הנגיף. מה ההסתברות שמי שקיבל את התרופה נושא את הנגיף אם התרופה גרמה לו לתופעות לוואי?

<u>פרק ב'</u> – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

.4 נתון מעגל שמרכזו בנקודה O הנמצאת על הקוטר AC . דרך הנקודה O עובר מעגל קטן יותר החותך את המעגל הגדול בנקודות B ו- C . המיתר AB חותך את המעגל הקטן בנקודה D .



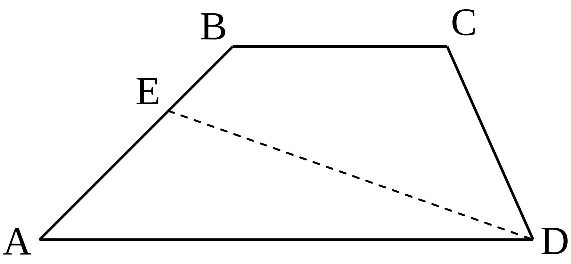
א. הוכח: $AD=DC$.

הנקודה P היא מרכז המעגל הקטן. נתון בנוסף כי: $OP=DB$.

ב. הוכח: $\sphericalangle DCB=\sphericalangle DCO$.

ג. דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל הגדול. הישר העובר דרך הנקודות P ו- O חותך את המשיק בנקודה E , וחותך את המיתר CB בנקודה F . נתון כי רדיוס המעגל הקטן הוא R .

הבע באמצעות R את ההפרש: $CE-FE$.



.5 נתון טרפז ABCD שאורכי הבסיסים שלו הם $AD = 3\sqrt{39}$ ס"מ,
$BC = \sqrt{39}$ ס"מ. נתון גם: $\sphericalangle ADC = 60^o$, $\sphericalangle BAD = 30^o$.

א. חשב את גובה הטרפז.

ישר העובר דרך קודקוד D חותך את השוק AB בנקודה E כך שהישר מחלק את שטח הטרפז לשני מצולעים שווי שטח.

ב. חשב אורך הקטע DE.

ג. מהקודקוד C העבירו ישר המקביל לצלע AB. מהקודקוד B העבירו ישר המקביל לקטע ED. הישרים נחתכים בנקודה M.
מצא את רדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle BCM$.

<u>פרק ג'</u> – חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2+ax}{\sqrt{1-x}}$, a פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

ב. (1) קבע עבור אילו ערכי a אין לפונקציה אסימפטוטה אופקית.
(2) קבע עבור אילו ערכי a אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית.

ג. (1) קבע עבור אילו ערכי a יש לפונקציה נקודת קיצון.
(2) מצא את נקודת הקיצון ואת סוגה (במידת הצורך הבע באמצעות a).

ד. נתון כי קיימת נקודת קיצון וכי ערך ה- x שלה הוא -2.
(1) מצא את ערך ה- y של נקודת הקיצון.
(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
(3) שרטט את גרף הפונקציה.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(-|x|)$. שרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

.7 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 6$

א. (1) הוכח כי הפונקציה היא זוגית.
(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.
(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(המשך תרגיל 7 בעמ' הבא >>>)

נתונה פונקציה חדשה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=|2x^4-8x^2+6|$

ב. שרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

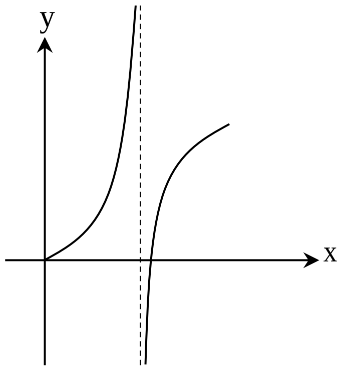
ג. עבור הפונקציה $g(x)$ מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מטה וכלפי מעלה של הפונקציה (אם קיימים).

ד. בנקודת המקסימום הימנית ביותר של הפונקציה $g(x)$ העבירו אנך לציר ה- x. חשב את השטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה $g(x)$ והצירים.

ה. הנקודה x_1 היא נקודת החיתוך הימנית ביותר של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x, והנקודה x_2 היא נקודת החיתוך השמאלית ביותר של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x.

נתונה פונקציה $h(x)$ המקיימת: $h(x)=|2x^4-8x^2+c|$.

מצא את c עבורו הפונקציה אינה קעורה כלפי מעלה בתחום $x_2\le x\le x_1$. נמק.



8. נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan x+2x$, המוגדרת בתחום: $0\le x\le\pi$.

גרף הפונקציה משורטט משמאל.

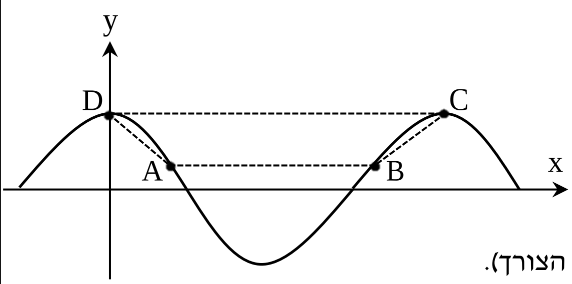
א. (1) הראה כי: $f(1.837)=0$ (בקירוב).

(2) מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. קודקודי מקבילית EFGH מונחים על גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

הקודקוד G הוא נקודת המקסימום של הפונקציה. הקודקודים E ו- F הם נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

מצא את שיעורי הקודקוד H. (דייק עד שלוש ספרות אחרי הנקודה).



בשרטוט משמאל מתואר גרף הפונקציה $g(x)=\cos x$. על גרף הפונקציה מונחים ארבעה קודקודי טרפז ABCD ($AB||DC$).
הקודקוד D נמצא על נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y, הקודקוד C הוא נקודת המקסימום של הגרף הקרובה ביותר לציר ה- y מימין, שיעור ה- x של הקודקוד A הוא t ($0<t<\pi$).

ג. מצא את שיעורי הקודקודים A,B,C,D (הבע באמצעות t במידת הצורך).

ד. נתון ששטח הטרפז ABCD הוא מקסימלי עבור $t=t_1$.

(1) הוכח שמתקיים: $\tan\left(\frac{t_1}{2}\right)+t_1=2\pi$

(2) היעזר בסעיף ב' וחשב את השטח המקסימלי של הטרפז ABCD.

בהצלחה!

תשובות סופיות

1. **א.** 0.338 **ב.** $\frac{4\pi}{3}$ **ג.** **(1)** 3 פעמים **(2)** פעמיים

2. **א.** הסדרה חשבונית **ב.** **(1)** לא נכונה **(2)** נכונה **(3)** לא נכונה. **ג.** $a_1 = 5$ **ד.** $\frac{1}{10}$

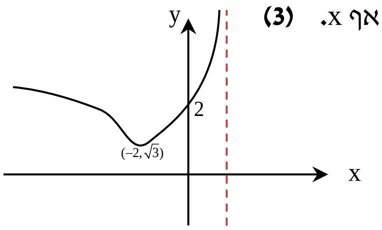
3. **א.** 0.24. **ב.** $\frac{2}{3}$ **ג.** 0.1556. **ד.** $\frac{7}{8}$.

4. **א.** הוכחה **ב.** הוכחה **ג.** $0.1055R$

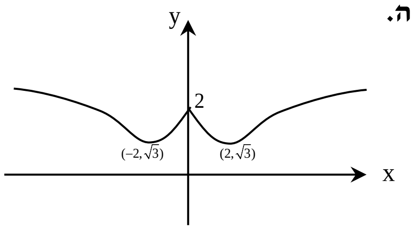
5. **א.** $\frac{\sqrt{117}}{2}$ **ב.** 13 ס"מ **ג.** $4\frac{1}{3}$ ס"מ

6. **א.** $x<1$, $(0,2)$ **ב.** **(1)** $a \neq 0$ **(2)** $a=-2$. **ג.** **(1)** $-2<a<0$ **ג.** **(2)** $\min\left(2+\frac{2}{a}, \frac{2a+4}{\sqrt{-1-\frac{2}{a}}}\right)$

ד. **(1)** $\sqrt{3}$ **(2)** חיוביות: $x<1$. שליליות: אף x. **(3)**



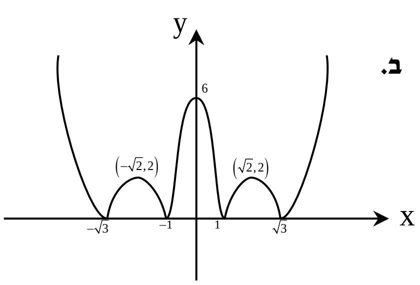
ה.



7. **א.** (1)הוכחה **(2)** , $(\sqrt{2},-2)\min$, $(0,6)\max$, $(-\sqrt{2},-2)\min$.

(3) $(0,6), (1,0), (-1,0), (-\sqrt{3},0), (\sqrt{3},0)$

ב.



ג.
$\cup$: $x<-\sqrt{3}$, $-1<x<-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}<x<1$, $x>\sqrt{3}$

$\cup$: $-\sqrt{3}<x<-1$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}<x<\sqrt{\frac{2}{3}}$, $1<x<\sqrt{3}$

ד. 4.261 יח"ר **ה.** $c = 4\frac{4}{9}$

8. **א.** **(1)** הוכחה **(2)** $x=\frac{\pi}{2}$ **ב.** $(1.304, 2\pi)$

ג. $A(t,\cos t)$, $B(2\pi-t,\cos(2\pi-t))$, $C(2\pi,1)$, $D(0,1)$ **ד.** **(1)** הוכחה **(2)** 6.839 יח"ר