



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

מבחן מתכונת 1 – תש"ף

שאלון 035582

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.

משך המבחן: שעתיים ורבע

מבנה השאלון: במבחן 2 פרקים.

בפרק א' עליך לבחור שתי שאלות מתוך שאלות 1-3

בפרק ב' עליך לבחור שאלה אחת מתוך שאלות 4-5

מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.

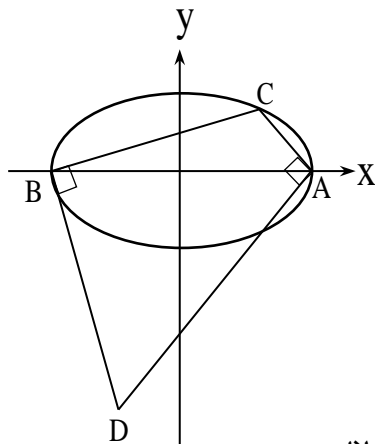
שאלות המבחן מנוסחות בלשון זכר מטעמי נוחות, אך מופנות לבנות ולבנים כאחד.

הבהרה: כאשר כתוב למצוא "נקודות" או "פתרונות" ברבים, ייתכן שתהיה תשובה אחת (או פחות)

חלק א' – וקטורים, טריגונומטריה במרחב, גיאומטריה אנליטית ומספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

עליך לענות על שתיים מהשאלות 1-3. (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות)

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



1. באליפסה שמשוואתה: $9x^2 + 25y^2 = 225$ חסום משולש ABC, כך

שהצלע AB מתלכדת עם הציר הגדול של האליפסה, והקודקוד C נמצא על היקף האליפסה.

דרך הנקודה A מעבירים ישר המאונך ל-AC, ודרך הנקודה B מעבירים ישר המאונך ל-BC. הישרים הנ"ל נפגשים בנקודה D (ראה ציור).

א. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות D שהוגדרו באופן זה.

ב. הישר $x = x_1$ חותך את המקום הגיאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף א',

בנקודות Q ו-T ($y_Q > y_T$), וחותך את האליפסה הנתונה בנקודות M ו-N

($y_M > y_N$).

קבע האם קיים x_1 עבורו מתקיים: $QM = MN = NT$. אם כן, מצא את x_1 (מצא את כל

האפשרויות), אם לא – נמק מדוע.

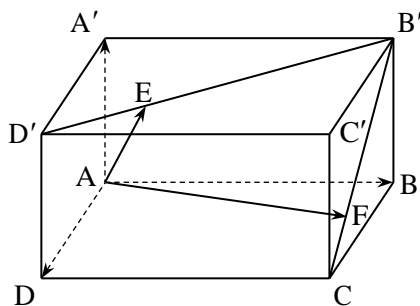
ג. מעגל חסום בין האליפסה הנתונה והמקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' כך שמרכזו מונח על כיוונו החיובי של

ציר ה-y. דרך המוקד השמאלי של האליפסה הנתונה העבירו משיק למעגל זה.

מצא את משוואת המשיק (שתי אפשרויות).



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה



2. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ הנקודות E ו- F נמצאות בהתאמה על האלכסונים $B'D'$ ו- CB' כך שמתקיים: $\overrightarrow{D'E} = t \cdot \overrightarrow{D'B'}$, $\overrightarrow{CF} = t \cdot \overrightarrow{CB'}$.

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$

א. מצא את היחס $\frac{|\underline{u}|}{|\underline{w}|}$ שעבורו המרובע $A'EFB$ הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. נתון: $3 \cdot \overrightarrow{A'B} = 4 \cdot \overrightarrow{EF}$. מצא את ערכו של t .

ג. אלכסוני המרובע $A'EFB$ נחתכים בנקודה P . כמו כן נתון כי $|\underline{u}| > |\underline{v}|$.

על פי הסעיפים הקודמים, קבע ונמק האם הזווית $\sphericalangle A'PB$ היא חדה, ישרה או קהה.

3. א. נתון $\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}i$ מצא את z ($z \in \mathbb{C}$).

ב. פתרון המשוואה שבסעיף א' הוא פתרון של המשוואה $z^n = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. מצא את הערך האפשרי הקטן ביותר של n (n מספר טבעי) ומצא את כל פתרונות המשוואה.

ג. חשב את הסכומים:

$$(1) (z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)^{20} \quad (2) z_1^{15} + z_2^{15} + z_3^{15} + z_4^{15} + z_5^{15}$$

ד. הפתרון שמצאת בסעיף א' הוא אחד מקודקודיו של טרפז החסום במעגל היחידה. הזווית בין אלכסון הטרפז לבין הבסיס הגדול של הטרפז היא בת 45° . כמו כן, נתון כי הבסיס הקטן של הטרפז שווה לרדיוס המעגל. מצא את קודקודי הטרפז (מצא את שתי האפשרויות).



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

חלק ב' – חדו"א ואלגברה של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, בעיות גדילה ודעיכה (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

עליך לענות על שאלה אחת מתוך השאלות 4-5. (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)
שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x^2 + ax}$ (a פרמטר). לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $x = -\frac{1}{2}$.

א. מצא את ערך הפרמטר a.

הצב את הערך של a שמצאת בסעיף אי וענה על הסעיפים הבאים:

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. על גרף הפונקציה בוחרים ברביע הראשון 2 נקודות A ו-B כך ש- $x_B > x_A$. שיעור ה-y של הנקודה A הוא

0.5. מנקודות A ו-B מורידים אנכים לציר ה-x החותכים אותו בנקודות D ו-C בהתאמה, כך שנוצר טרפז ABCD.

גרף הפונקציה f(x) מחלק את הטרפז ABCD לשני שטחים.

S_1 הוא שטח המוגבל בין גרף הפונקציה f(x), בין ציר ה-x והישרים AD ו-BC, ו- S_2 את השטח המוגבל

על ידי גרף הפונקציה f(x) ועל ידי הישר AB. נתון: $S_1 = \ln 4 - \ln 3$.

חשב את S_2 .

5. נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = \ln(1 + \frac{4}{e^{2x}})$ ו- $g(x) = \ln(e^x + \frac{4}{e^x})$.

חקור כל אחת מהפונקציות בנפרד, ע"פ סעיפים א'-ו':

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות חיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. אסימפטוטות מקבילות לצירים (אם יש כאלה).

ד. נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה.

ה. תחומי קעירות כלפי מעלה \cup וכלפי מטה \cap .

ו. שרטט באותה מערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות.

ז. בנקודת החיתוך של שתי הפונקציות זו עם זו עוברים משיקים לפונקציות. מצא את הזווית בין שני המשיקים.

ח. נתונים שני ישרים $x = a, x = b$ ($b > a, b \cdot a > 0$). בטא באמצעות a ו-b את השטח הכלוא בין הפונקציות

f(x), g(x) ושני הישרים.

בהצלחה!



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר
התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות סופיות

1. א. $25x^2 + 9y^2 = 625$ אליפסה ב. לא ג. $y = 0.63x + 2.52$, $y = 4.47x + 17.88$

2. א. 1:1 ב. 0.25

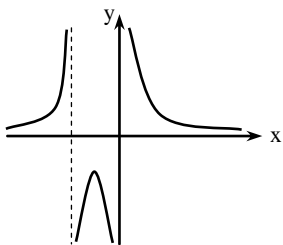
3. א. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ב. $\text{cis}60^\circ, \text{cis}132^\circ, \text{cis}204^\circ, \text{cis}276^\circ, \text{cis}348^\circ$, $n = 5$ ג. (1) 0 (2) -5

ד. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -i, -1$ או $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. א. $a = 1$ ב. $x = 0, x = -1, y = 0$; $x \neq -1, x \neq 0$

ג. $\max(-\frac{1}{2}, -4)$, עלייה : $-\frac{1}{2} < x < -1$, ירידה : $x < -1, x > 0$; $-\frac{1}{2} < x < 0, x > 0$ ד.

ה. $\frac{1}{3} - \ln \frac{4}{3}$



5. א. $f(x)$: כל x , $g(x)$: כל x

ב. $f(x)$: $(0, \ln 5)$, $g(x)$: $(0, \ln 5)$

ג. $f(x)$: $(x \rightarrow +\infty) y = 0$, אין אסימפטוטות. $g(x)$: אין אסימפטוטות.

ד. $f(x)$: אין נקודות קיצון, יורדת לכל x

ה. $g(x)$: עלייה : $x > \ln 2$, ירידה : $x < \ln 2$ נקודת הקיצון : $\min(\ln 2, \ln 4)$

ה. $f(x)$: קעורה כלפי מעלה לכל x , $g(x)$: קעורה כלפי מעלה לכל x

ו. 27.03° ד. $\frac{|a^2 - b^2|}{2}$

