



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

מבחן מתכונת 1- תשע"ח

שאלון 035581

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפלי), דפי נוסחאות מצורפים.

משך המבחן: שלוש שעות וחצי.

מבנה השאלון: במבחן 3 פרקים.

בפרק א' עליך לבחור שתי שאלות מתוך שאלות 1-3

בפרק ב' עליך לבחור שאלה אחת מתוך שאלות 4-5

בפרק ג' עליך לבחור שתי שאלות מתוך שאלות 6-8

מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה. תשובות ללא דרך (חישוב/הסבר) לא תקבלנה ניקוד.

פרק א' – אלגברה ובעיות מילוליות, סדרות, הסתברות (40 נקודות)

עליך לענות על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות)

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני צינורות מובילים מים לבריכה. דרך הצינור הראשון נכנסים 30 מ"ק בדקה. יום אחד כשהבריכה הייתה ריקה, פתחו את הצינור הראשון ואחרי a דקות פתחו את הצינור השני. הבריכה התמלאה והתברר שכמות המים שנכנסו דרך הצינור הראשון הייתה גדולה פי 5 מזו שנכנסה דרך הצינור השני. למחרת, כשהבריכה הייתה ריקה, שוב פתחו תחילה את הצינור הראשון ואחרי 17 דקות את הצינור השני. הבריכה התמלאה בזמן הארוך יותר ב-2 דקות מאשר ביום הקודם (מרגע פתיחת הצינור הראשון).
 - א. הבע באמצעות a את כמות המים שנכנסת דרך הצינור השני בדקה.
 - ב. הבע באמצעות a את הזמן בו התמלאה הבריכה ביום הראשון.
 - ג. מצא לאילו ערכי a יש פתרון לבעיה.

2. נתונה הסדרה $2, -5, 8, -11, 14, \dots$. הערכים המוחלטים של איברי הסדרה מהווים סדרה חשבונית.

- א. מצא את הנוסחה לאיבר הכללי a_n .
- ב. נתון שבסדרה יש מספר אי זוגי של איברים וסכום כל איברי הסדרה הוא 74. מצא את סכום האיברים במקומות האי זוגיים ואת סכום האיברים במקומות הזוגיים.
- ג. הוכח: סכום n האיברים הראשונים של הסדרה הוא $(-1)^{n+1} \cdot 1.5n + 0.25 \cdot [1 - (-1)^n]$.

המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

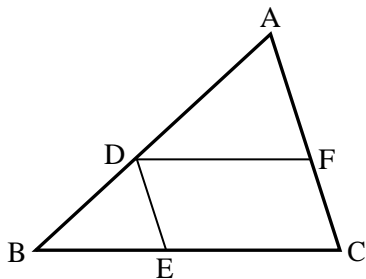
התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

3. במבחן שנערך בפקולטה גדולה, התקבלו התוצאות הבאות: 70% מהסטודנטים (בנים או בנות) הצליחו במבחן. $\frac{11}{15}$ מבין הבנים הצליחו במבחן ו-0.35 מבין הבנות נכשלו במבחן.
- א. מהו אחוז הבנים ומה אחוז הבנות בפקולטה ?
- ב. במבחן שני שנערך בפקולטה הני"ל התקבלו התוצאות הבאות: $\frac{2}{3}$ מבין אלה שהצליחו במבחן היו בנים ו- $\frac{3}{5}$ מבין אלה שנכשלו היו בנות. מהו אחוז הסטודנטים (בנים או בנות) שהצליחו במבחן השני?
- ג. בפקולטה לומדים 1000 סטודנטים (בנים או בנות). כמה סטודנטים הצליחו לפחות במבחן אחד מבין שני המבחנים? (אין תלות בין המבחנים)
- ד. בוחרים באקראי 4 סטודנטים (בנים או בנות). מה ההסתברות שארבעתם הצליחו ב-2 המבחנים? (דייק בתשובתך 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית)

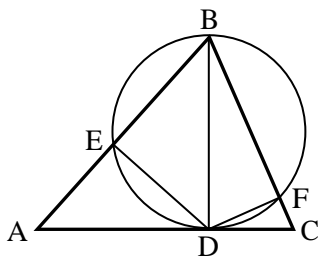
פרק ב' – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

עליך לענות על שאלה אחת מתוך השאלות 4-5. (20 נקודות)

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. נתון משולש ABC. דרך הנקודה D שעל הצלע AB מעבירים ישרים מקבילים לצלעות BC ו-AC החותכים צלעות אלו בנקודות E ו-F. בהתאמה. נסמן את השטחים: $S_{\triangle ADF} = s_1$, $S_{\triangle BDE} = s_2$.
- א. הבע באמצעות s_1 ו- s_2 את שטח המשולש ABC.
- ב. נתון כי שטח המקבילית CEDF הוא $2s_2$. הבע באמצעות s_1 בלבד את שטח המשולש ABC.



5. נתון משולש ABC שזוויותיו הן: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. $BD \perp AC$. נסמן את אורך BD ב-h. מעגל שקוטרו הוא BD חותך את הצלעות AB ו-BC בנקודות E ו-F בהתאמה.

א. הוכח: $S_{BEDF} = \frac{h^2 \sin \beta \cos(\alpha - \gamma)}{2}$

- ב. ידוע שאורך רדיוס המעגל החסום במשולש ישר זווית הוא: $r = \frac{a+b-c}{2}$, כאשר a ו-b ניצבים ו-c הוא היתר

במשולש. איזה תנאי צריך להתקיים במשולש ABC כדי שרדיוס המעגל החסום במשולש EBD יהיה שווה לרדיוס המעגל החסום במשולש FBD? הוכח בעזרת חישובים מתאימים.



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

פרק ג' – חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי. (40 נקודות)
עליך לענות על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות)
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 4ax}{(x + 2a)^2}$, $a > 0$ פרמטר.

חקור את הפונקציה עפ"י הסעיפים הבאים ומצא: (הבע באמצעות a במידת הצורך)

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ג. נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה (אם יש כאלה).
- ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים של הפונקציה.
- ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x מעבירים משיקים לגרף הפונקציה. המשיק בנקודה הימנית חותך את גרף הפונקציה בנקודה ממנה מעלים אנך לציר ה- x . השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, האנך שהעלינו והמשיק בנקודה השמאלית שווה ל-0.5. מצא את ערך הפרמטר a .

7. נתונה פונקציית הנגזרת: $f'(x) = \frac{4 + 4\text{tg}x}{1 + \cos 2x}$. נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הקרובה ביותר לציר ה- y , נמצאת

על הישר $y = 1$.

- א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
- ב. חקור את הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq \pi$ ומצא:
 - (1) אסימפטוטות אנכיות של הפונקציה.
 - (2) נקודות קיצון של הפונקציה ואת סוגן.
 - (3) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
 - (4) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. הוכח שהפונקציה קעורה כלפי מעלה בתחום הנתון.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. מצא את שיפועי הישרים המשיקים לגרף הפונקציה בקצות התחום הנתון.
- ו. נתון שגרף הפונקציה $f(x)$ חותך את גרף הפונקציה $f'(x)$ בנקודה אחת בתחום $0 < x < \pi$. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$. נמק.
- ז. מצא לאילו ערכים של x בתחום $0 \leq x \leq \pi$ מתקיים האי שוויון: $f(x) \cdot f'(x) \cdot f''(x) > 0$? נמק.



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות מקבילות לצירים של הפונקציה.
- ג. הוכח שהפונקציה עולה בתחום הגדרתה.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. נתונה פונקציה נוספת $g(x) = \sqrt{x}$. מעבירים ישר $x = a$, $a > 1$, פרמטר, החותך את הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות B ו-A. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

בהצלחה!



המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר

התוכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות סופיות

ב. $5 < a < 15$

א. (1) $\frac{10a}{a-5}, \frac{60}{15-a}$

ב. $-3n$

א. (2) $a_n = (-1)^{n-1}(3n-1)$

ד. $-1776, 1850$

ג. $3n-1$

ג. 0.4 ב. עברו מבחן שני 75% מהסטודנטים

א. (3) בניס 60% ובנות 40%

ב. $S_{ABCD} = 4 \cdot S_1$

א. (4) $S_{ABCD} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

ב. $\beta = 90^\circ$

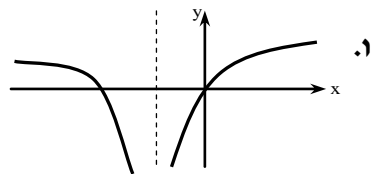
א. (5) הוכחה

ב. עלייה: $x > -2a$, ירידה: $x < -2a$

א. (6) $x \neq -2a$

ד. קעורה כלפי מטה בתחום הגדרתה.

ג. $(0, 0), (-4a, 0)$



ה. $y = 1, x = -2a$

ז. $a = 1$

א. (7) $f(x) = \text{tg}^2 x + 2\text{tg} x + 2$

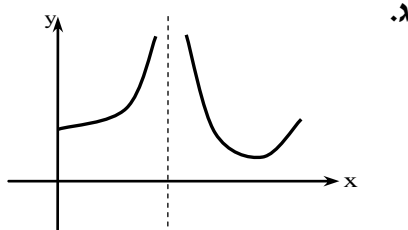
ב. (1) $x = \frac{\pi}{2}$

(2) $(0, 2) \text{ min}, (\frac{3\pi}{4}, 1) \text{ min}, (\pi, 2) \text{ max}$

(3) $(0, 2)$

(4) עלייה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$

(5) פונקציה קעורה כלפי מעלה בתחום הגדרתה.



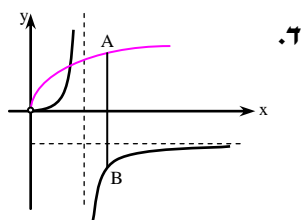
ג. א. $\frac{3\pi}{4} < x < \pi, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

ה. 3 פתרונות.

ד. $m_1 = f'(0) = 2, m_2 = f'(\pi) = 2$

ב. "חור" $(0, 0), y = -1, x = 1$

א. (8) $x > 0, x \neq 1$



ג. הוכחה

ה. 4