שאלון 807

מבחן מס' 1

פרק א': גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענה על **שתי שאלות** מבין השאלות 1-3 ($66\frac{2}{3}$ **נקודות**)

1. הנקודה $A(-1;1)$ היא אחד מקדקודי הבסיס של משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים ΔABC.
משוואת הגובה ליתר במשולש זה היא: $y = 2x + 8$. C קדקוד הזווית הישרה, נמצא מעל ציר x.

א. מצא את הקדקודים B ו- C של המשולש ABC.

ב. 1) מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש ABC.

2) מצא, על המעגל שמצאת בסעיף ב', נקודה D, שבה המשיק למעגל מקביל ליתר של המשולש ABC.

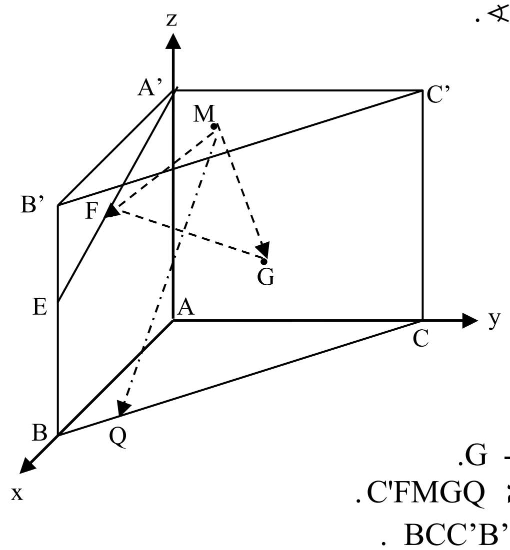
3) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

ג. המשיק שמצאת בסעיף ב-3) משיק גם לפרבולה $y^2 = 2px$.
מרחק המשיק ממוקד הפרבולה הוא $\sqrt{5}$.

1) מצא את משוואת הפרבולה.

2) האם מדריך הפרבולה עובר דרך הנקודה A? נמק.

2. נתונה מנסרה משולשת שבסיסה משולש ישר זווית ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$.
הנקודה A נמצאת בראשית הצירים (ראה ציור).
הנקודה M היא נקודת מפגש התיכונים במשולש $A'B'C'$,
הנקודה E נמצאת על המקצוע BB' ומקיימת:
$\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$. הנקודה F היא אמצע $A'E$. הנקודה G היא נקודת מפגש האלכסונים של הפאה $BCC'B'$. הנקודה Q נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.



נתון: $AA' = 9$, $AC = 6$, $AB = 3$.

א. מצא את משוואת המישור הנקבע ע"י הנקודות M, F ו- G.

ב. הראה שהישר MQ נמצא במישור הנקבע ע"י הנקודות M, F ו- G.

ג. הראה כי נפח הפירמידה $AFMGQ$ גדול פי 6 מנפח הפירמידה $C'FMGQ$.

ד. מצא את הזווית שיוצר מישור המשולש MFG עם מישור הפאה $BCC'B'$.

3. א. הראה שהמקום הגיאומטרי של הנקודות במישור של גאוס המקיימות את המשוואה:
$|2z-2| = z+\overline{z}+2$ הוא פרבולה.

ב. המספר z_1 מקיים: $z_1 = 4\sqrt{2}\left[\cos(150^\circ)+i\sin(150^\circ)\right]^2 \cdot \left[\cos(-51^\circ)+i\sin(-51^\circ)\right]^5$.

1) מצא את המספר z_1 והראה שהנקודה A המייצגת אותו במישור של גאוס נמצאת על הפרבולה שמצאת בסעיף א'.

2) הישר העובר דרך הנקודה A ודרך ראשית הצירים חותך את המדריך של הפרבולה שמצאת בסעיף א' בנקודה B. מצא את המספר המרוכב z_2 המייצג את הנקודה B.

3) מצא את הארגומנט של המספר w המקיים: $w = \frac{z_2}{z_1}$.

4) z_1 הנו האיבר הראשון של סדרה הנדסית. z_2 הוא האיבר השלישי של הסדרה.
מצא את האיבר השני של הסדרה (מצא את שתי האפשרויות).

<u>פרק ב':</u> גדילה ודעיכה, פונקציה מעריכית ולוגריתמית

ענה על <u>שאלה אחת</u> מבין השאלות 4-5 ($33\frac{1}{3}$)

4. א. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2e^x - 1$ המוגדרת לכל ערך של x.

1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

2) מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים (אם יש כאלה).

3) חשב את $f(1)$ וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) הסבר מדוע יש לפונקציה נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- x .

5) סמן את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ב- $(a;0)$ ומצא בין אילו שני מספרים שלמים נמצא המספר a.

ב. נתונה פונקציה נוספת $g(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

2) הראה כי $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (הבע בעזרת a לפי הצורך).

4) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה (הבע בעזרת a לפי הצורך).

5) מצא לפונקציה $g(x)$ אסימפטוטות מקבילות לצירים.

6) סרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

7) כמה פתרונות יש למשוואה $g(x) = 1$? נמק.

ג. הגרפים של הפונקציות $g(x)$ ו- $g'(x)$ אינם נחתכים בתחום $x > 0$.
השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$ לבין גרף הפונקציה $g'(x)$, הישר $x = a$ והישר $x = 1$ הוא $\frac{3}{7} - \ln a$. מצא את a .

5. לפונקציה : $f(x) = \frac{a}{\ln x} + b\ln x$ יש נקודת קיצון ב- $x = e^2$ (b פרמטר חיובי).

א. 1) הוכח: $a = 4b$.

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

3) הבע באמצעות b את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

4) נתון כי הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה <u>רק</u> עבור הערכים $-4 < k < 4$.

מצא את a ואת b .

5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת $g'(x) = f(x)$.

תחום ההגדרה של $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של $f(x)$

1) מצא את ערכי x עבורם שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$ שליליים.

2) האם קיים משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ המקביל לציר ה- x ? נמק.

3) מעבירים משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $x > 1$ ומשיק נוסף בתחום $0 < x < 1$.

האם ייתכן ששני המשיקים מקבילים זה לזה ? נמק.

4) מעבירים משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $x > 1$.

מהו הערך הקטן ביותר של שיפוע המשיק ?

5) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $g(x)$.

בהצלחה!

<u>תשובות</u>

.1 **א.** $C(-2;4)\ ,\ B(-5;3)$ **ב.** 1) $(x+3)^2+(y-2)^2=5$

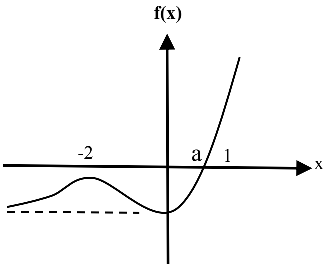
2) $D(-4;0)$ 3) $y=-0.5x-2$ **ג.** 1) $y^2=4x$ 2) כן

.2 **א.** $7x+y+z-18=0$ **ד.** 20.06^o

.3 **א.** $y^2=4x$ **ב.** 1) $z_1=4+4i$ 2) $z_2=-1-i$ 3) 180^o

3) $a_2=\sqrt{8}cis135^o=-2+2i$ או $a_2=\sqrt{8}cis315^o=2-2i$

.4 **א.** 1) $(-2;-0.46)$ מקסימום , $(0;-1)$ מינימום 2) $y=-1$ 3) $f(1)=1.72$ 4)



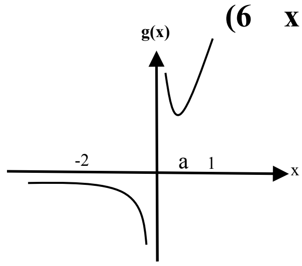
5) $0<a<1$ **ב.** 1) $x\neq 0$ 3) תחום עלייה: $x>a$,

תחום ירידה: $x<0\ ,\ 0<x<a$ 4) $(a;e^a+\frac{1}{a})$ מינימום

5) $x=0\ ,\ y=0$ 6)

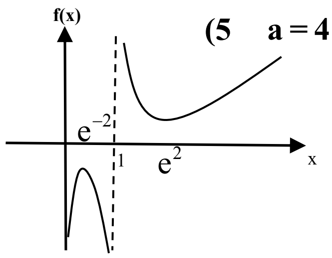
7) אף פתרון

ג. $a=0.7$



.5 **א.** 2) $x>0\ ,\ x\neq 1$ 3) $(e^2;4b)$ מינימום , $(e^{-2};-4b)$ מקסימום

4) $b=1\ ,\ a=4$ 5)



ב. 1) $0<x<1$

2) לא

3) לא

4) 4

5) תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$: $0<x<e^{-2}\ ,\ x>e^2$

תחומי הקעירות כלפי מטה $\cap$: $e^{-2}<x<1\ ,\ 1<x<e^2$

שאלון 807

מבחן מס' 2

פרק א': גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענה על **שתי שאלות** מבין השאלות 1-3 ($66\frac{2}{3}$ **נקודות**)

1. נתונות הנקודות $A(0;6)$ ו- $B(-8;0)$. דרך נקודה כלשהי E על הקטע AB מעבירים ישר המקביל לציר ה- x. ישר זה חותך את ציר ה- y בנקודה C.

א. 1) מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של הישרים BC ו- OE, כאשר O ראשית הצירים.

2) הראה כי המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף הקודם הנו התיכון לצלע OB במשולש AOB.

3) הנקודה P נמצאת על המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א-1). הנקודה E נמצאת על הישר $y = 3$. מצא את שיעורי הנקודה P.

4) האם הנקודה P היא נקודת מפגש התיכונים במשולש AOB ? נמק.

ב. הנקודה P שמצאת בסעיף א-3) נמצאת גם על אליפסה שאורך צירה הקטן הוא $\frac{12}{\sqrt{5}}$ יח'.

מצא את סכום מרחקי הנקודה P ממוקדי האליפסה.

2. נתונים שני מישורים π_1 ו- π_2. משוואת המישור π_1 היא $2x + y - z + 1 = 0$.
משוואת המישור π_2 היא $x + y - 2z + 5 = 0$.

א. המישור π_3 מאונך למישור π_1. ישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_3 מקביל לישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_2. מעגל שמרכזו M, נמצא במישור π_3 ומשיק למישור π_1 בנקודה $A(-4;10;3)$.

1) מצא הצגה פרמטרית לישר עליו נמצא מרכז המעגל M.

2) מצא את משוואת המישור π_3.

3) מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_3.

ב. רדיוס המעגל M הוא $\sqrt{24}$. שיעור ה- x של הנקודה M הנו מספר שלילי.

מצא את שיעורי הנקודה M.

3. א. מצא את פתרונות המשוואה : $(z-4)(z^2-2z+4)=0$ וסמן אותם במישור של גאוס.

ב. 1) מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור של גאוס שהנם פתרונות המשוואה:
$z\overline{z}-2z-2\overline{z}=0$.

2) הראה שפתרונות המשוואה שמצאת בסעיף א' נמצאים על המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ב'-1).

ג. אחד הפתרונות של המשוואה הנתונה בסעיף א' הנו מספר מרוכב הנמצא ברביע הראשון.
נסמן פתרון זה ב- a_1 . a_1 הנו האיבר הראשון של סדרה הנדסית שמנתה $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

1) הראה שהאיבר ה- 21 של הסדרה נמצא על המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ב-1).

2) האיבר ה- 21 של הסדרה מיוצג במישור של גאוס על-ידי הנקודה A ואילו האיבר החמישי של הסדרה מיוצג במישור על-ידי הנקודה B .
חשב את הזווית החדה בין הישרים AO ו- BO (O ראשית הצירים).

<u>פרק ב':</u> גדילה ודעיכה, פונקציה מעריכית ולוגריתמית

ענה על <u>שאלה אחת</u> מבין השאלות 4-5 ($33\frac{1}{3}$)

4. במעבדה של מדען נשקלו בתאריך מסוים 200 גרם של חומר רדיואקטיבי א' שזמן מחצית החיים שלו 40 חודשים ו- 300 גרם של חומר רדיואקטיבי ב' שזמן מחצית החיים שלו 20 חודשים.

א. כעבור כמה זמן מאותו תאריך יהיו במעבדה כמויות שוות של שני החומרים הנ"ל ?
מה יהיה משקל החומרים באותו זמן ?

ב. t חודשים לאחר התאריך המסוים היה משקל חומר ב' גדול פי 1.3755 מכמות חומר א'.
כעבור x חודשים מאותו מועד היה משקל חומר ב' גדול פי 1.26 ממשקל חומר א'.
הראה כי $x=2t$.

ג. כעבור כמה חודשים מתחילת השקילה הייתה כמות חומר א' גדולה ב- 25 גרם מכמות חומר ב' ?

ד. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מתארות , בהתאמה , את כמות חומר א' וכמות חומר ב' כעבור זמן t חודשים , $0\le x\le 120$.

1) סרטט , באותה מערכת צירים , את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

2) הישר $x=a$, $25<a\le 120$, חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות A ו- B בהתאמה. מצא את הערך של a עבורו אורך הקטע AB מקסימלי.

3) לאחר התאריך בו כמויות החומרים היו שוות זו לזו , מהו ההפרש הגדול ביותר בין משקלי שני החומרים ?

ה. נתונות הפונקציות $h(x)=\log_2\left[f(x)\right]$ ו- $p(x)=\log_2\left[g(x)\right]$.

1) הראה שהפונקציות $h(x)$ ו- $p(x)$ הן פונקציות קוויות.

2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו- $p(x)$.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x + \ln(x^2 - a)$. הישר $x = \sqrt{8}$ הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה .

א. 1) מצא את a .

2) מצא את תחום ההגדרה , את שיעורי נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

3) האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x ? אם כן, בכמה נקודות. נמק.

4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת : $g(x) = f'(x)$. מצא לפונקציה $g(x)$:

1) תחום הגדרה.

2) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

3) נקודות חיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).

4) לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

5) מצא את ערכי x בתחום $x < -\sqrt{8}$ עבורם מתקיים: $f(x) \cdot g(x) > 0$.

ג. נתון: $h(x) = e^{f(x)}$.

1) מצא את תחומי העלייה , תחומי הירידה ואת שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

2) חשב את ערך האינטגרל : $\int_{-4}^{-3} \left[g(x) \cdot e^{f(x)} \right] dx$.

3) נסמן ב- m את התוצאה שקיבלת בסעיף הקודם .

קבע איזו מן הטענות הבאות נכונה ונמק את קביעתך:

I. m שווה לשטח המוגבל בין גרף הפונקציה $h(x)$ וציר ה- x בתחום $-4 \le x \le -3$.

II. $|m|$ שווה לשטח המוגבל בין גרף הפונקציה $h(x)$ וציר ה- x בתחום $-4 \le x \le -3$.

III. $|m|$ קטן מן השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $h(x)$ וציר ה- x בתחום $-4 \le x \le -3$.

בהצלחה!

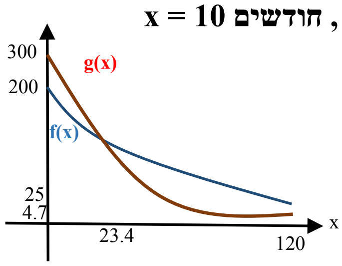
תשובות

1. א. 1) $y = 1.5x + 6$ 3) $(-\frac{8}{3};2)$ 4) כן ב. 8 יח'

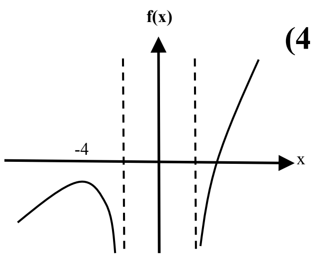
2. א. 1) $\underline{x} = (-4;10;3) + t(2;1;-1)$ 2) $4x - y + 7z + 5 = 0$
3) $\underline{x} = (-2;-3;0) + p(-1;3;1)$ ב. $M\ (-8;8;5)$

3. א. $z_1 = 4, z_2 = 1 + \sqrt{3}i, z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ ב. 1) $(x-4)^2 + y^2 = 16$
ג. 2) 60^o

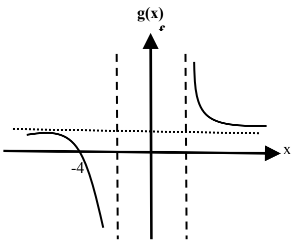
4. א. 23.4 חודשים , 133.33 גרם ב. $t = 5$ חודשים , $x = 10$ חודשים
ג. כעבור 40 חודשים וכעבור 103.4 חודשים ד. 1)
2) $a = 63.4$ 3) 33.33 גרם
ה. 1) $p(x) = 8.229 - \frac{x}{20}$, $h(x) = 7.644 - \frac{x}{40}$
2) $(23.4;7.059)$



5. א. 1) $a = 8$ 2) תחום ההגדרה: $x > \sqrt{8}$ או $x < -\sqrt{8}$,
נקודת הקיצון: $(-4;-1.92)$ מקסימום
תחומי העלייה: $x > \sqrt{8}$, $x < -4$, תחומי ירידה: $-4 < x < -\sqrt{8}$
3) כן, בנקודה אחת בתחום $x > \sqrt{8}$
4)



ב. 1) $x > \sqrt{8}$ או $x < -\sqrt{8}$ 2) $x = \sqrt{8}$, $x = -\sqrt{8}$, $y = 1$
3) $(-4;0)$ 4)



5) $-4 < x < -\sqrt{8}$
ג. 1) תחומי העלייה: $x > \sqrt{8}$, $x < -4$
תחומי ירידה: $-4 < x < -\sqrt{8}$
$(-4;0.147)$ מקסימום
2) -0.097
3) טענה II