



בשיתוף  
המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר  
התכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

**מבחן מגן 3 – תשע"ו**

**שאלון 035581 (035806)**

**יש לכתוב את הפתרונות בעט רגיל בלבד. בחינה שתשמש בעפרון - לא יהיה ניתן לערער עליה. שימוש בעט מחיק יגרום לאי בדיקת הבחינה.**

**חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון (לא גרפי), דפי נוסחאות מצורפים.**

**משך המבחן: שלוש שעות וחצי.**

**מבנה השאלון: במבחן 3 פרקים.**

**בפרק א' עליך לבחור שתי שאלות מתוך שאלות 1-3**

**בפרק ב' עליך לבחור שאלה אחת מתוך שאלות 4-5**

**בפרק ג' עליך לבחור שתי שאלות מתוך שאלות 6-8**

**מפתח ההערכה: הניקוד על כל השאלות שווה.**

**תשובות ללא דרך (חישוב / הסבר) לא תקבלנה ניקוד.**

**פרק א' – אלגברה ובעיות מילוליות, סדרות, הסתברות (40 נקודות)**

**עליך לענות על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות)**

**שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.**

1. המרחק בין העיר A לעיר B הוא 200 ק"מ. בשעה 9:00 בבוקר יצא רוכב קטנוע מהעיר A ורכב במהירות קבועה לעבר העיר B ובאותה שעה יצא רוכב אופניים מהעיר B ורכב אף הוא במהירות קבועה לעבר העיר A. שני הרוכבים נפגשו כעבור m שעות והמשיכו כל אחד לדרכו. רוכב הקטנוע הגיע לעיר B, התעכב בה 40 דקות וחזר לרכב לעבר העיר A. בשעה 13:00 פגש שוב את רוכב האופניים שהיה עדיין בדרכו לעיר A.

א. בטא באמצעות m את המהירות בה רכב רוכב האופניים.

ב. מצא את ערכי m עבורם יש פתרון לבעיה.

ג. מצא את ערכי m, עבורם ההפרש בין מהירותו של רוכב הקטנוע לבין מהירותו של רוכב

האופניים, אינו עולה על 72 קמ"ש.



2. נוסחת האיבר הכללי של סדרה הוא:  $a_n = -n^2 + 17n - 30$ .

א. מצא את מקומותיהם של איברי הסדרה שערכם המוחלט אינו קטן מ-30.

ב. ידוע כי סכום הסדרה הינו:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{-2n^3 + 48n^2 - 130n}{6}$ .

כמו כן, נתון כי מספר איברי הסדרה קטן מ-15 וערכו המוחלט של האיבר האחרון אינו קטן

מ-30. מצא את התחום בו נמצא סכום הסדרה.

ג. מצא בסדרה הנתונה את האיבר הגדול ביותר.

3. בבית ספר מסוים  $\frac{10}{19}$  מבין החברים בתנועת נוער הם בנים. 76% מכלל התלמידים בבית הספר הם

חברים בתנועת נוער. 4% מהתלמידים הם בנות שאינן חברות בתנועת נוער.

א. מצא את אחוז הבנים ואת אחוז הבנות בבית הספר.

ב. בסקר שנערך בבית הספר הני"ל לגבי תלבושת אחידה התקבלו התוצאות הבאות:

$\frac{7}{15}$  מבין המתנגדים לתלבושת אחידה (בנות או בנים) היו בנים. כל הבנות היו נגד תלבושת

אחידה. מצא את אחוז התלמידים (בנים או בנות) שהיו בעד תלבושת אחידה.

ג. בוחרים באקראי תלמיד (בן או בת).

(1) מה ההסתברות שהוא חבר בתנועת נוער והוא בעד תלבושת אחידה? (הנח שאין תלות בין

החברות בתנועת הנוער לבין הדעה לגבי תלבושת אחידה).

(2) מה ההסתברות שהוא לא חבר בתנועת נוער והוא נגד תלבושת אחידה?



בשיתוף  
המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר  
התכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

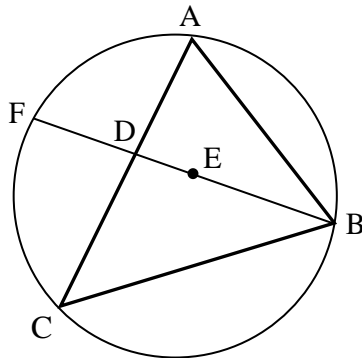
**פרק ב' – טריגונומטריה במישור, גיאומטריה (ניתן לפתור בשיטות של גיאומטריה אוקלידית או בכל דרך אחרת) (20 נקודות)**

**עליך לענות על שאלה אחת מתוך השאלות 4-5.**

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. משולש ABC חסום במעגל. E היא נקודת מפגש חוצי זוויות במשולש ABC.

המשך חוצה הזווית BD חותך את המעגל החוסם את המשולש בנקודה F.



א. הוכח:  $AB \cdot BC = BF \cdot BD$ .

ב. נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ,

$AD = 3$  ס"מ,  $BE = 4$  ס"מ.

חשב את אורכי הקטעים DC ו-BF.

ג. חשב את היחס בין שטח המשולש CDE לבין

שטח המשולש CEB.

5. בטרפז ABCD שבו  $BC \parallel AD$

נתון:  $BC = \sqrt{39}$  ס"מ,  $AD = 3\sqrt{39}$  ס"מ.

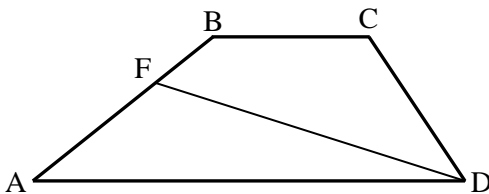
$\angle BAD = 30^\circ$ ,  $\angle ADC = 60^\circ$ . דרך הנקודה D

מעבירים ישר כך שהוא מחלק שטח הטרפז

לשני חלקים שווים שטח.

א. מצא את אורך הקטע DF (ראה ציור).

ב. חשב את גודל הזווית  $\angle FDB$ .





בשיתוף  
המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר  
התכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

**פרק ג' – חזו"א של פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, רציונאליות ושורש ריבועי.**

(40 נקודות)

**עליך לענות על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות)**

**שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.**

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^3x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
- ה. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה של הפונקציה.
- ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 0.25\pi$ .
- ח. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $x$ .



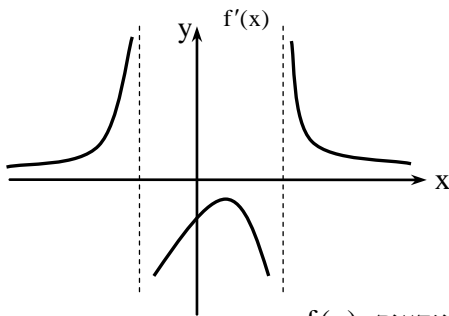
בשיתוף  
המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר  
התכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2-4x}{(x^2-x-6)^2}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. בצור שלפניך מתואר גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .



(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) לפונקציית הנגזרת  $f'(x)$  יש נקודת מקסימום

בנקודה שבה  $x = 0.5$ . מצא את נקודת הפיתול,

ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה של הפונקציה  $f(x)$ .

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

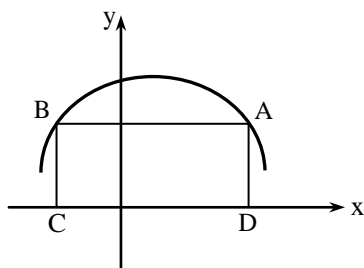
ו. מצא את ערכי  $x$  עבורם מתקיים:  $f'(x) < 0$  וגם  $f(x) \cdot f''(x) > 0$ .

ז. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה  $f(x)$ , ציר ה- $x$  והישרים  $x = 6$  ו- $x = 4$ .

ח. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה  $f'(x)$ , ציר ה- $x$  והישרים  $x = 6$  ו- $x = 4$ .

8. נתונה פונקציית הנגזרת  $f'(x) = \frac{2-2x}{\sqrt{-2x^2+4x+a}}$ , (a פרמטר). הישר  $y - 2x - 1 = 0$  משיק לגרף

הפונקציה  $f(x)$  בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .



א. מצא את  $a$  ואת הפונקציה  $f(x)$ .

ב. בצור גרף הפונקציה  $f(x)$ . המלבן ABCD כלוא

בין גרף הפונקציה  $f(x)$  לבין ציר ה- $x$  כמתואר

בצור. מצא את היקפו המקסימלי של המלבן ABCD.

**בהצלחה!**

בשיתוף  
המרכז הישראלי לקידום מדעי המתמטיקה ע"ר  
התכנית לנוער מוכשר במתמטיקה ע"ש ויקטור בנטטה

תשובות:

(1) א.  $x = \frac{1000-300m}{11m}$  . ב.  $0 < m < 3\frac{1}{3}$  . ג.  $1\frac{1}{24} \leq m < 3\frac{1}{3}$

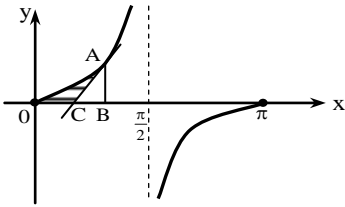
(2) א.  $5 \leq n \leq 12$  או  $n \geq 17$  . ב.  $50 \leq S \leq 316$  . ג. 42

(3) א. בבית הספר 60% בניסו- 40% בנות . ב. 25% . ג. (1) 0.19 . (2) 0.18

(4) א. הוכחה . ב.  $DC = 4$  ס"מ ,  $FB = 8$  ס"מ . ג.  $S_{ACDE} : S_{ACEB} = 1 : 2$

(5) א. 13 ס"מ . ב.  $13.9^\circ$

(6) א.  $x \neq \frac{\pi}{2}$  . ב.  $(\pi, 0)$  max ,  $(0, 0)$  min



ג. הפונקציה עולה בתחום הגדרתה, כלומר  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

ד.  $x = \frac{\pi}{2}$  . ה.  $\cup$  :  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  ,  $\cap$  :  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  . ו.

ז.  $y = 8x + 2 - 2\pi$  . ח.  $\frac{1}{4}$

(7) א.  $x \neq -2$  ,  $x \neq 3$

ב.  $y = 0$  ,  $x = -2$  ,  $x = 3$

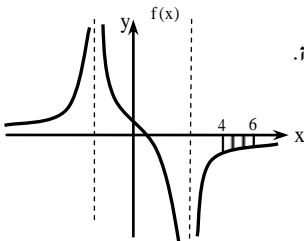
ג.  $(\frac{1}{2}, 0)$  ,  $(0, \frac{1}{18})$

ד. 1. עליה:  $x > 3$  או  $x < -2$  . ירידה:  $-2 < x < 3$

2.  $(0.5, 0)$  פיתול,  $\cup$  :  $-2 < x < 0.5$  ,  $\cap$  :  $x < -2$  ,  $0.5 < x < 3$  ,  $x > 3$  . ה.

ו.  $-2 < x < 0.5$  או  $0.5 < x < 3$

ז.  $\frac{1}{4}$  . ח. 0.351



(8) א.  $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 4x + 1}$  . ב. 6 . ג. 2.12